

Національна академія наук України
Західний науковий центр
Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
Центр математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
Національний університет «Львівська політехніка»
Львівський національний університет імені Івана Франка



**МІКРО- ТА НАНОНЕОДНОРІДНІ МАТЕРІАЛИ:
МОДЕЛІ ТА ЕКСПЕРИМЕНТ**

**MICRO- AND NANO-INHOMOGENEOUS MATERIALS:
MODELS AND EXPERIMENTS**

Матеріали
Міжнародної наукової конференції
присвяченої 100-річчю
Національної академії наук України
17 – 18 вересня 2018 р.
Львів, Україна

УДК 539.3
М 59

Науковий редактор – *Є. Чапля*, доктор фізико-математичних наук, професор (ЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Університет Казимира Великого, Польща)

Рецензенти:

- Секція 1 *Я. П'янило* – доктор технічних наук
(ЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України)
- Секція 2 *Є. Чапля* – доктор фізико-математичних наук, професор
(ЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Університет Казимира Великого, Польща)
- Секція 3 *О. Грицина* – доктор фізико-математичних наук
(ЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України)

Матеріали статей опубліковані в авторській редакції

М 59 Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: Моделі та експеримент.
Матеріали Міжнародної наукової конференції, м. Львів, 17 –
18 вересня 2018 року. – Львів: «Растр – 7», 2018. – 68 с.

ISBN 968-617-7726-09-7

Збірка містить матеріали доповідей Міжнародної наукової конференції з проблем фізичного і математичного опису явищ та процесів у неоднорідних матеріалах. Презентовані статті можуть зацікавити механіків, фізиків, математиків та фахівців у галузі математичного моделювання.

ISBN 968-617-7726-09-7

© ЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2018
© Видавництво «Растр – 7», 2018

ЗМІСТ

Секція 1

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РІЗНОЇ ФІЗИЧНОЇ ПРИРОДИ В ТІЛАХ ІЗ МІКРОСТРУКТУРОЮ

Гайвась Б., Соколовський Я., Борецька І.

Задача теплопровідності для ортотропного пористого бруса..... 9

Козачок О.

Вплив рідинного містка і газу в міжповерхневих зазорах на контакт пружного тіла і текстурованої квазіеліптичними виїмками жорсткої основи.....11

Костробій П., Маркович Б., Візнович О., Токарчук М.

Узагальнені рівняння переносу з просторово-часовою нелокальністю..... 14

Костробій П., Рижа І.

Моделювання процесу окисації чадного газу на двомірній поверхні каталізатора 15

Машиков О., Мамчур Ю., Жукаускас С.

Проблеми математичного моделювання та застосування методів механіки для забезпечення екологічної безпеки складних об'єктів 16

П'янило Я.

Фрактальна розмірність та похідні дробових порядків 18

Сулим Г., Піскозуб Й.

Моделювання нелінійної контактної взаємодії тіл.....20

Секція 2

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ МЕХАНІКИ ЗВ'ЯЗАНИХ ПОЛІВ

Боженко Б., Нагірний Т., Червінка К.

Про вплив домішок на розмірні ефекти у нанопористих тілах23

Голінко І

Математичне моделювання та керування промисловими системами штучного мікроклімату25

Лимаренко О., Кліменков О.

Моделювання нелінійних білярезонансних ефектів у системі «рідина з вільною поверхнею – нециліндричний резервуар».....28

Сулим Г., Пастернак Я.

Математичне моделювання та розрахунок ефективних характеристик шаруватих, скелетних та стрічкових магнітоелектричних композитів30

Савула Я., Дияк І., Мазуряк Н.

Комп'ютерне моделювання адвекції-дифузії у середовищі з тонким каналом31

Середницька Х.

Ефект напрямленості теплового потоку у біматеріалі з міжфазною тріщиною, заповненою ідеальним газом33

Чапля Є., Гера Б.

Обернені задачі теплопровідності для природних утворень земної поверхні35

Чапля Є., Грицина О.

До побудови локально градієнтної теорії багатокомпонентних в'язких рідин36

Чапля Є., Чернуха О., Білуцак Ю.

Континуальні моделі гетеродифузійного масоперенесення розпадних речовин у тілах з мікроструктурою38

Rut J., Wolczański T.

Computer-based systems for monitoring and control of industrial processes40

Секція 3

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ, ТЕРМО- ТА НАНОМЕХАНІКИ

Аветисян А., Кушнір Р. Мусій Р., Мельник Н.

Моделювання та дослідження теплових і механічних властивостей одно- і двошарових конструкційних елементів при імпульсній електромагнітній обробці за використання моделі електропровідної пластини.....42

Боженко Б., Онишко О., Онишко Л., Чапля Є.

До питання математичного моделювання термомеханічної поведінки багатокомпонентних твердих тіл в умовах тепло- і масообміну та рекристалізації44

Волчанський Т., Гачкевич О., Козакевич Т. Чупик І., Торський А.

Варіант математичної моделі кількісного опису залишкових структурного та напруженого станів сталевих пластин за нагріву рухомим джерелом тепла46

<i>Гаєвська Л., Івасько Р., Моринь С., Солодяк М., Станік-Беслер А.</i> Математичні проблеми опису теплових і механічних властивостей неферромагнітних електропровідних тіл при дії квазіусталеного електромагнітного поля за підмагнічування постійними полями, паралельними вихідному.....	48
<i>Гачкевич О., Гуменчук О., МариновичА., Торський А.</i> Фізико-математична модель термомеханіки частково прозорих тіл за теплового опромінення при наявності відбиваючих поверхонь	51
<i>Гачкевич О., Казарян К., Мусій Р., Тарлаковський Д.</i> Фізико- математичні основи кількісного опису теплових і механічних властивостей неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди	53
<i>Гачкевич М., Козярска А., Равска-Скотнічни А., Чорний Б.</i> Моделювання та оптимізація теплових режимів виготовлення модульних оболонкових конструкцій зі скла способом ситалоцементного з'єднання	55
<i>Гачкевич О., Станік-Беслер А., Терлецький Р., Торський А.</i> Математичні моделі та методи дослідження зумовленої тепловим опроміненням механотермодифузії в частково прозорих деформівних твердих тілах з газовими домішками	57
<i>Ірза Є., Козярска А., Міщенко В., Можаровський В.</i> Фізико-математична модель механічної поведінки тіл обертання з термов'язкопружних функціонально-градієнтних матеріалів у процесі їх цільової термообробки	59
<i>Кушнір Р., Токовий Ю.</i> Розвиток методів дослідження пружної поведінки неоднорідних твердих тіл	61
<i>Махоркін М.</i> Математичні проблеми моделювання фізико-механічних полів в області клиновидного з'єднання декількох матеріалів	62
<i>Микитин М.</i> Кільцеве та кругове відшарування пружного півпростору від жорсткої основи під дією розподіленого по колу стоку тепла	65
<i>Терлецький Р., Гуменчук О., Метельські А., Журавська А.</i> Методика кількісного опису механічної поведінки частково прозорого порожнистого циліндра за теплового опромінення	67

Секція 1

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РІЗНОЇ ФІЗИЧНОЇ ПРИРОДИ В ТІЛАХ ІЗ МІКРОСТРУКТУРОЮ

УДК 539.374

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ПОРИСТОГО БРУСА

Богдана Гайвась¹, Ярослав Соколовський², Ірина Борецька²

¹ Центр математичного моделювання
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
² Львівський Національний лісотехнічний університет

haj@cmm.lviv.ua, Sokolowskyy@ukr.net

Теплові процеси при сушінні пористих тіл пов'язані з передачею тілу тепла від сушильного агента, переносом тепла всередині тіла, фазовими переходами. Вплив пористої структури враховується введенням в рівняння Стефана-Максвелла ефективних коефіцієнтів бінарної взаємодії.

Метою дослідження є побудова математичної моделі задачі осушення пористого бруска прямокутного поперечного перерізу $\{2L_1, 2L_2\}$, осушення якого відбувається з поверхонь під дією конвективно-теплого нестационарного потоку сушильного агента. Керуючим параметром є температура сушильного агента. Вважаємо, що рідина ρ_L в осушеній зоні відсутня. Нехай V – об'єм тіла, V_m – об'єм осушеної зони. Осушена зона пористого тіла $x_i \in (-L_i, -L_{mi}) \cup (L_{mi}, L_i)$ $i = 1, 2$; L_{mi} – межа фазового переходу; складається з пари v , повітря a , скелета s ; індексами позначено компоненти пари, повітря та скелета відповідно. Приведена теплоємність c_p осушеної зони залежить від пористості Π , теплоємностей C_v, C_a, C_s , густин пари ρ_v , повітря ρ_a та скелета ρ_s . Граничні умови на границях $x_i = \pm L_i$, ($i = 1, 2$) виражають теплообмін між поверхнями тіла і сушильним агентом за законом Ньютона. Приймаємо, що в осушеній зоні рідина видалена, а в решті об'єму

вона повністю зберглася. Рівняння для приведеної теплоємності c_p та головних коефіцієнтів теплопровідності λ_i в квазігомогенному наближенні в змінних ξ_1, ξ_2 приведемо до канонічного виду, $\xi_i = \sqrt{\lambda/\lambda_1} x'_i$, де x'_i виражається через x_i і направляючі косинуси нових змінних, головні коефіцієнти теплопровідності λ_i , ($i = 1, 2$) визначаються через коефіцієнти теплопровідності λ_{ij} ($i, j = 1, 2$) у змінних x_i . Розв'язок крайової задачі подамо у вигляді добутку розв'язків просторово-одномірних задач $T(\xi_1, \xi_2, \tau) = T_1(\xi_1, \tau) \cdot T_2(\xi_2, \tau)$, $T_i(\xi_i)|_{\xi_i = \xi_{mi}} = 0$, де T – температура. У процесі осушення положення лінії фазового переходу визначається деякою замкнутою кривою $F_m(\xi_{m1}, \xi_{m2}, \tau)$. Перейдемо до нових змінних

$$\frac{T(\xi_1, \xi_2, \tau) - T_m(\xi_{m1}, \xi_{m2}, \tau)}{T_0(\xi_1, \xi_2, \tau) - T_m(\xi_{m1}, \xi_{m2}, \tau)} = \eta, \quad \beta = \frac{\rho_m c_m \bar{a}}{\lambda_m} = \frac{\bar{a}}{\bar{a}_m}, \quad \tau^* = \frac{\tau \bar{a}}{l_1 l_2}.$$

Отримаємо рівняння балансу тепла з врахуванням рухомої межі фазового переходу

$$\int_{F_m=0}^{F_0=0} \int \frac{d\eta}{d\tau^*} ds = \iint_{F_0} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl + \beta \eta \frac{\partial V}{\partial \tau^*}, \quad V(F_m, F_0) = \int_{F_m=0}^{F_0=0} \int ds = \iint_{S_\Pi} ds - \iint_{S_\Phi} ds. \quad (1)$$

Знаходимо об'єм осушеної зони як функцію часу. Прямокутний перетин у системі координат $O\xi_1\xi_2$ перейде в паралелограм $\bar{B}\bar{D}\bar{D}_1\bar{B}_1$, координати якого $\bar{B}(\Delta_2, \Delta_4)$, $\bar{D}(-\Delta_1, \Delta_3)$, $\bar{D}_1(-\Delta_2, \Delta_4)$, $\bar{B}_1(\Delta_1, -\Delta_3)$, де Δ_i виражаються через головні коефіцієнти теплопровідності, кути l_i, m_i повороту системи при приведенні рівняння теплопровідності до канонічного виду, розміри поперечного перерізу. Контур поперечного перерізу бруса $\bar{B}\bar{D}\bar{D}_1\bar{B}_1$ у змінних ξ_1, ξ_2 обмежений поверхнею F_0 .

На зовнішньому контурі $\eta = \frac{T_0(\xi_1, \xi_2) - T_m}{T_0 - T_m} = 1$. Функція $\varepsilon(\tau)$ у початковий момент дорівнює нулеві, тобто $\varepsilon(0) = 0$. Наприкінці процесу ($\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$) маємо: $\varepsilon(\tau) = 1$. При цьому $\Delta T = T(\xi_1, \xi_2, \tau) - T_m$ досягається на проміжній поверхні $F_m = (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)(\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) - \delta\varepsilon(\tau) = 0$, а різниця $T_0 - T_m$ відповідає зовнішній поверхні $\xi_1^2 = \Delta_1^2$, $\xi_1^2 = \Delta_2^2$, $\xi_2^2 = \Delta_3^2$, $\xi_2^2 = \Delta_4^2$. Підставивши ці значення у вираз (1), отримаємо

розмір цієї поверхні: $\delta\varepsilon(\tau)$. Обчисливши інтеграли, які входять в рівняння балансу тепла, приходимо до рівняння

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau^*} I \left[|J_{s\Pi} - J_{\Phi}| - \varepsilon^2 \beta \eta (J_V - A) \right] = \varepsilon \left[c_1 J_{BB_1} + c_2 J_{BD} \right].$$

Величини $J_{s\Pi}$, J_{Φ} , J_V обчислюються за відомими фізико-тепловими характеристиками конкретного матеріалу. Для цього будемо графік залежності ε від τ^* з врахуванням розміру міжграничної площі осушеної зони між F_0 і F_m , отримаємо рівняння кінетики, що описує зміну об'єму осушеної зони в часі для даного значення коефіцієнтів температуропровідності в осушеній та вологій зонах, і, враховуючи залежність об'єму осушеної зони від часу, визначаємо вологість в брусі як функцію часу.

PROBLEM OF HEAT CONDUCTING FOR ORTHOTROPIC POROUS TIMBER

A model of heat conducting of an orthotropic porous timber under the influence of convective heat drying of a drying agent is constructed. On the boundary of the phase transition, the boundary condition with a moving boundary is formulated.

УДК 539.3

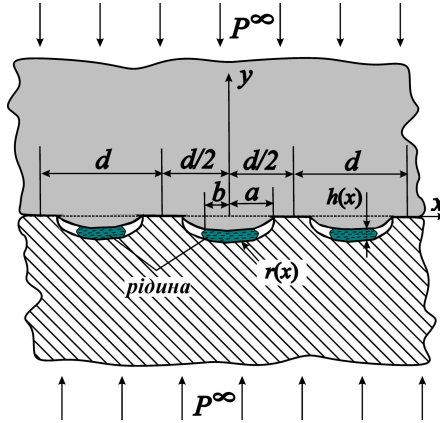
ВПЛИВ РІДИННОГО МІСТКА І ГАЗУ В МІЖПОВЕРХНЕВИХ ЗАЗОРАХ НА КОНТАКТ ПРУЖНОГО ТІЛА І ТЕКСТУРОВАНОЇ КВАЗІЕЛІПТИЧНИМИ ВИЙМКАМИ ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ

Олег Козачок

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

OlegKozachok@ukr.net

Розглянемо безфрикційну взаємодію пружного ізотропного півпростору з жорсткою основою, межа якої має нескінченну періодичну систему розташованих з періодом d плитких тунельних виїмок квазіеліптичної форми $r(x) = -A \left(1 - \operatorname{tg}^2(\pi x/d) / \operatorname{tg}^2(\pi a/d) \right)^{1/2}$ ширини $2a$ ($A/(2a) \ll 1$). Півпростір притискається до основи під дією рівномірно розподіленого на нескінченності навантаження P^∞ і в ньому реалізується стан плоскої деформації.



Внаслідок нерівності основи між тілами виникають просвіти висоти $h(x)$ (див. рис.). Вважаємо, що просвіти частково заповнені нестисливою рідиною, що не змочує поверхні тіл, внаслідок чого формує рідинний місток у середній частині зазорів, де їх висота найбільша. У вільній від рідини частині кожного зазору знаходиться газ, тиск якого не змінюється зі зміною зовнішнього навантаження. Об'єм нестислової рідини V_0 , що припадає на одиницю довжини зазору у поздовжньому напрямі, є сталою величиною ($V_0 = const$). Враховуючи малу висоту зазорів і повне незмочування рідиною тіл, будемо вважати, що меніск (бічна поверхня рідини, яка межує з газом) є півколом, радіус якого R рівний половині висоти зазорів в точках $x = \pm b$ виходу менісків на поверхню тіл: $R = h(b)/2$. Це дозволяє записати формулу Лапласа, що зв'яже перепад тисків у рідині й газі з поверхневим натягом, що діє на меніску, у вигляді $P_2 - P_1 = 2\sigma/h(b)$, де P_2 і P_1 – тиск рідини і газу, σ – поверхневий натяг рідини, $h(b)$ – висота зазору на межі рідини і газу.

Використовуючи метод функцій міжконтактних зазорів [1], задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта відносно похідної від висоти зазорів $h'(x)$, яке після заміни змінних $\xi = tg \frac{\pi x}{d}$, $\eta = tg \frac{\pi t}{d}$, $\alpha = tg \frac{\pi a}{d}$, $\beta = tg \frac{\pi b}{d}$, переходить в СІР з ядром Коші:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2(1 + \xi^2)} K(P^\infty - P_f(\xi)) - \frac{A\pi}{\alpha}, \quad |\xi| \leq \alpha, \quad (1)$$

де $P(\xi) = \begin{cases} P_1 + 2\sigma/h(\beta), & |\xi| < \beta \\ P_1, & \beta < |\xi| < \alpha \end{cases}$; $K = 2(1-\nu)/G$; G , ν – модуль зсуву та

коефіцієнт Пуассона пружного тіла.

Розв'язок рівняння (1) визначено аналітично. Тиск рідини та координату меніску знайдено з формули Лапласа та трансцендентного рівняння, яке було отримано з умови збереження кількості рідини в зазорах з урахуванням її нестисливості. Запропоновано аналітично-числову процедуру розв'язання цього рівняння з використанням методу послідовних наближень.

На основі розробленої методики досліджено вплив поверхневого натягу рідини на контактну поведінку мікротекстурованих тіл, їх локальні й інтегральні контактні параметри.

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проектом (Ф75/141-2018) Державного фонду фундаментальних досліджень.

1. *Kozachok O. P., Martynyak R. M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // *Math. Mech. Solids.*, 2018. – <https://doi.org/10.1177/1081286518781679>.

**EFFECT OF A LIQUID BRIDGE AND A GAS
IN THE INTERFACE GAPS ON CONTACT BETWEEN
AN ELASTIC BODY AND A RIGID BASE TEXTURED
WITH QUASIELLIPTICAL GROOVES**

A frictionless contact between an elastic body and a rigid base with periodically arranged quasielliptical grooves is modeled. The central parts of interface gaps contain an incompressible liquid, and the gaps edges are filled with a gas under constant pressure. The formulated contact problem for the elastic half-space is reduced to a singular integral equation with the Hilbert kernel for a derivative of the gaps height and a transcendental equation for a width of the liquid-filled region. The dependences of the liquid-filled region width, the pressure drop, the shape of the gaps and the contact approach of the bodies on the applied load, the volume and the surface tension of the liquid are analyzed.

УДК 538.93

**УЗАГАЛЬНЕНІ РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ
З ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОЮ НЕЛОКАЛЬНІСТЮ****Петро Костробій¹, Богдан Маркович¹,
Олександра Візнович¹, Михайло Токарчук^{1,2}**¹ Національний університет «Львівська політехніка»
² Інститут фізики конденсованих систем НАН УкраїниPetro.P.Kostrobii@lpnu.ua, Bohdan.M.Markovych@lpnu.ua,
Oleksandra.V.Viznovych@lpnu.ua, mtok2010@ukr.net

Застосувавши метод нерівноважного статистичного оператора Зубарева [1], отримано нові немарковські рівняння переносу частинок, виходячи із рівняння Ліувілля у дробових похідних запропонованого Тарасовим [2] для просторово неоднорідної системи з фрактальною структурою. У такому підході можуть бути отримані узагальнені кінетичні рівняння, рівняння гідродинаміки, а також узагальнені рівняння дифузії. У випадку дифузійних процесів, використавши відповідні наближення для функції пам'яті [3] та апарату дробового числення [4] отримано узагальнені рівняння дифузії типу Кеттано, Максвелла-Кеттано у дробових похідних. Розглянуто різні моделі частотної залежності для функцій пам'яті, які приводять до відомих результатів типу рівнянь дифузії у дробових похідних [5-9], а також їхніх узагальнень.

1. *Kostrobij P., Markovych B., Viznovych O., Tokarchuk M.* J. Math. Phys. – 2016. – **57**, No 9. – P. 093301.
2. *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Field and Media. Springer, New York, 2011.
3. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications 1 edition. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
4. *Kostrobij P., Grygorchak I., Ivashchyshyn F., Markovych B., Viznovych O., Tokarchuk M.* J. Phys. Chem. A. – 2018. – **122**, No 16. – P. 4099.
5. *Nigmatullin R. R.* Physica Status Solidi (b). – 1986. – **133**, No 1. – P. 425.
6. *Compte A., Metzler R. J.* Physics A: Mathematical and General. – 1997. – **30** (21). – P. 7277.
7. *Kosztolowicz T., Lewandowska K. D.* J. Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2009. – **42**, No. 5. – P. 055004.
8. *Qi H., Jiang X.* Physica A. – 2011. – **390**, No 11. – P. 1876.
9. *Sun H., Chen W., Li C., Chen Y.* Physica A. – 2010. – **389**, No 14. – P. 2719.

GENERALIZED TRANSPORT EQUATION WITH NONLOCALITY OF SPACE-TIME

A general approach for obtaining the generalized transport equations with fractional derivatives by using the Liouville equation with fractional derivatives for a system of classical particles and Zubarev's nonequilibrium statistical operator (NSO) method is presented.

УДК 538.9

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОКСИДАЦІЇ ЧАДНОГО ГАЗУ
НА ДВОМІРНІЙ ПОВЕРХНІ КАТАЛІЗАТОРА****Петро Костробій, Ірина Риж***Національний університет «Львівська політехніка»*

ira.saj@gmail.com

Запропоновано та досліджено кінетичну модель для опису часової динаміки каталітичного окиснення монооксиду вуглецю (СО) на поверхні платини Pt(110) [6]. Модель побудовано для механізму Лангмюра-Гіншелвуда [1]. Враховано двовимірність поверхні, на якій проходить реакція окиснення СО [4, 5]; структурний фазовий перехід на поверхні каталізатора, викликаний процесами адсорбції-десорбції [3]; вплив температури підкладки [2] на процес окиснення.

Показано, що в області стійкості реакція окиснення має коливний характер; досліджено вплив параметрів моделі на амплітуду та період коливань.

1. *Baxter R. J., Hu P.* Insight into why the Langmuir-Hinshelwood mechanism is generally preferred. *J. Chem. Phys.* 116 (11), 4379-4381 (2002).
2. *Connors K. A.* Chemical Kinetics: The Study of Reaction Rates in Solution. New York: VCH Publishers (1990).
3. *Gritsch T., Coulman D., Behm R. J., Ertl G.* Mechanism of the CO-induced (1×2)-(1×1) structural transformation of Pt(110) // *Phys. Rev. Lett.* – 1989. – **63**. – P. 1086-1089.
4. *Patchett A. J., Meissen F., Engel W., Bradshaw A. M., Imbihl R.* The anatomy of reaction diffusion fronts in the catalytic oxidation of carbon monoxide on platinum (110) // *Surf. Sci.* – 2000. – **454**, No 1. – P. 341-346.
5. *Ryzha I., Matseliukh M.* Carbon monoxide oxidation on the Pt-catalyst: modelling and stability // *ММС*. – 2017. – **4**, No 1. – P. 96-106.
6. *Костробій П. П., Токарчук М. В., Маркович Б. М., Ігнатюк В. В., Гнатів Б. В.* Реакційно-дифузійні процеси в системах «метал-газ». – Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2009.

**MODELING OF CARBON MONOXIDE OXIDATION PROCESS
ON THE TWODIMENSIONAL CATALYTIC SURFACE**

A kinetic model to describe the temporal dynamics of the catalytic oxidation of carbon monoxide (CO) on Pt(110) is investigated. The model is constructed for the Langmuir-Hinshelwood (LH) mechanism. There are taken into account: the two-dimensionality of the surface on which CO oxidation reaction occurs; the adsorbate-driven structural phase transition of the catalytic surface; the effect of the substrate temperature on the oxidation process.

УДК 629.7.072.8

ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МЕХАНІКИ ДЛЯ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЕКОЛОГІЧНОЇ БЕЗПЕКИ СКЛАДНИХ ОБ'ЄКТІВ

Олег Машков¹, Юлій Мамчур², Сергій Жукаускас³

¹ Державна екологічна академія післядипломної освіти та управління
² Верховна Рада України, Комітет з питань національної безпеки і оборони
³ Міністерство екології та природних ресурсів України

dei2005@ukr.net; mashkov_oleg_52@ukr.net, secretar@menr.gov.ua

Робота стосується розвитку нових технологічних підходів, які ґрунтуються на багаторічних наукових дослідженнях авторів у галузі технічної механіки, моделей та експериментів з механічними об'єктами складних систем.

Пропонується здійснювати повітряний старт, як спосіб запуску ракет або літаків екологічного моніторингу з висоти кількох кілометрів, куди доставляється апарат для запуску. Засобом доставки буде інший літак, повітряна куля чи дирижабль. З повітряного старту слід особливо виокремити «Повітряний старт на орбіту» – це метод запуску ракет-носіїв та/або космічних кораблів високо в повітрі з реактивних повітряних суден горизонтального зльоту як дозвучових, так і надзвучових. Пропонований метод виведення на орбіту має надзвичайні переваги над традиційним вертикальним запуском ракет, зокрема, завдяки зменшеній масі, сили протидії та вартості ракети. При цьому головними завданнями є забезпечення безпечного розходження апаратів (без зіткнення та попадання одного з об'єктів у факел двигунів іншого).

Тому розширення можливостей екологічного моніторингу можна здійснити з використанням рухомих екологічних комплексів, дистанційно пілотованих літальних апаратів і космічних систем спостереження при використанні дистанційних методів контролю параметрів навколишнього середовища, а також за рахунок удосконалення науково-методичного апарату оцінки стану зон екологічного ризику. Одним з перспективних методів проведення екологічного моніторингу є дистанційний, що базується на основі комплексного використання космічних, повітряних і рухомих наземних комплексів систем спостереження. У якості повітряних комплексів розглядаються безпілотні літальні апарати, дистанційно пілотовані літальні апарати.

Аналіз інформаційних технологій для діагностики і оцінки стану довкілля та техногенних об'єктів дозволяє визначити, що застосування аерокосмічних технологій дистанційного зондування відкривають нові можливості створення систем екологічного моніторингу забруднення навколиш-

нього природного середовища та техногенно небезпечних об'єктів, а також оцінки їх стану.

На основі проведеного обґрунтування необхідності розробки системи мобільного екологічного моніторингу з використанням аерокосмічних технологій сформульовано інноваційну технологію комплексного застосування різномісних систем екологічного моніторингу: космічні та літальні апарати, аеростати, автомобільні комплекси, морські катери, залізничні потяги, стаціонарні пункти спостереження.

Автори розглядають різні леєрні варіанти. Досліджено можливості конструкції, у якій раму з вітроколесами і генераторами підтримує на висоті аеростат регульованого обсягу. Аеростат суміщений з гнучким крилом і, за достатньої сили вітру, працює в режимі гнучкого крила. За цієї умови легкий газ із аеростата перекачується в балон. Балон і компресор можуть бути на висоті або на земній поверхні. У другому випадку легкий газ від аеростата до балона подається гнучким трубопроводом.

Доведено, що леєр постійного по всій його довжині перерізу завдовжки 5 км (для матеріалу з допустимою міцністю на розрив – 1500 кг/см² і питомою вагою 3 т/м³) може обірватися під дією власної ваги. Вага леєра рівномірного перерізу п'ятикілометрової довжини, який витримує навантаження 15 000 т, становитиме 25 650 т. На цій підставі зроблено висновок про те, що наразі підкорення великих висот технічно недосяжне. Автори дійшли висновку про працездатність цього варіанта і доцільність виконання подальших робіт, спрямованих на зменшення вартості конструкції, підвищення її надійності (продовження терміну служби) і безпеки шляхом здійснення багатоступеневої конструкції. У першій частині цієї праці розглянуто один з можливих варіантів конструкції для вітросилової установки потужністю 1 ГВт. Розрахована вага матеріалу леєра (сталевий трос) – 168 тис. тонн, вартість якого 504 млн \$, спонукала до пошуку способів здешевлення конструкції. Саме просування у вирішенні цього питання і висвітлено в подальших дослідженнях.

**PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELING AND APPLICATION
OF METHODS OF MECHANICS TO ENSURE ECOLOGICAL SAFETY
OF COMPOSITE OBJECTS**

The issues of application of methods of mechanics and mathematical modeling in problems of providing of ecological safety of complex objects of management are considered. The authors consider three important problems of mechanics for ensuring environmental safety. The first problem is the provision of a safe air launch (launch) of space monitoring vehicles. The second problem is the creation of air fan power plants of leer type at high altitudes. The third problem is the creation and application of remotely manned airborne environmental monitoring devices.

УДК 539.3

ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ ТА ПОХІДНІ ДРОБОВИХ ПОРЯДКІВ

Ярослав П'янило

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*

danylo794@gmail.com

Процеси руху газу в технологічних об'єктах в системах його транспорту описують, як правило, диференціальними рівняннями в частинних похідних. За теперішніх умов задання вхідної інформації (стосовно її точності та кількості) таких підхід до математичного моделювання забезпечує розв'язання прикладних задач. Однак в деяких випадках є необхідність в штучному заданні деяких параметрів для того, щоб забезпечити фізичну відповідність математичної моделі фізичному процесові. Це, зокрема, має місце у випадку побудови математичної моделі процесу фільтрації газу в пластах підземних сховищ, в яких значення тиску в кожній точці в заданий момент часу залежить від значення його в попередні значення часів. Одним із підходів до розв'язання цього питання є застосування похідних дробових порядків.

Метою роботи є аналіз та побудова математичних моделей фізичних процесів, в яких для розв'язування задач математичної фізики використовуються похідні дробових порядків.

Визначення дробових похідних. Оператор дробової похідної у термінах Капуто визначається так [1, 2]:

$${}^c D_{\tau}^{\alpha} = \frac{{}^c \partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}} \varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \int_0^{\tau} \frac{\partial_{\xi}^{m+1} \varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{\alpha-m}} d\xi, \quad (1)$$

де $m = [\alpha]$; $[\cdot]$ – ціла частина дійсного числа, а в термінах Ріммана-Ліувіля

$$D_{\tau}^{\alpha} = \frac{{}^c \partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}} \varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi^{m+1}} \int_0^{\tau} \frac{\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{\alpha-m}} d\xi, \quad (2)$$

Модель фільтрації газу в пористому середовищі. Процес масопереносу в пористих середовищах розглядається на прикладі фільтрації газу та рідини, яка описується рівнянням із дробовою похідною за часовою змінною [3]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial z} \right) = 2mh \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) + 2qp_{at} \right). \quad (3)$$

Модель фільтрації газу апробована в ході обчислювального експерименту на основі даних пористого середовища, площею $S = 16$ млн m^2 , за наступних початкових параметрів: $\mu = 0.000011$ Па·с, $h = 18.2$ м, $R = 506.7$ Дж/кг °К, $T = 293$ °К, $z = 0.87$, $m = 0.31$, $k = 1.8e - 12$ m^2 , сталої початкової умови та умов непроникності на межі середовища. На рис. 1-2 наведені обчислені значення тисків газу в околі свердловин (рис. 1), у примежовій зоні пласта (рис. 2) для значень порядку дробової похідної $\alpha = \{0.96; 0.98; 0.999\}$.

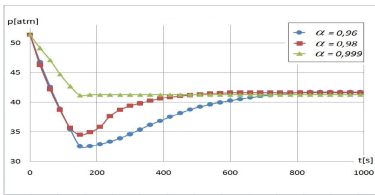


Рис. 1. Значення тисків газу в околі свердловин для різних значень порядку дробової похідної α

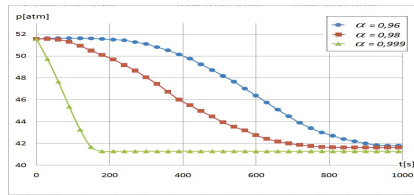


Рис. 2. Значення тисків газу в примежовій зоні пласта для різних значень порядку дробової похідної α

Пори природних середовищ мають складну геометрію. У таких ситуаціях доцільно використовувати фрактальну геометрію [1, 2]. Тоді для визначення порядку дробової похідної можна використати фрактальні розмірності, зокрема Хаусдорфа. Зокрема, якщо мікропори поділити на мікрокуби з довжиною ребра ε , то міру множини пор можна визначити наступним чином $M_\alpha(\varepsilon) = N(\varepsilon)\varepsilon^\alpha$. Тут $N(\varepsilon)$ - кількість кубів, що покривають хоч би одну точку середовища. Тоді фрактальна розмірність визначається наступним чином $\alpha = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln N(\varepsilon) / \ln \varepsilon$. Поряд з цим означенням фрактальної розмір-

ності мають місце і інші. Слід зауважити, що використання фрактальних розмірностей дає можливість лише оцінити порядок дробової похідної. Як видно з проведеного вище обчислювального експерименту, результат вирішення крайових задач з використанням похідних дробового порядку є досить чутливим до значення останнього. Тому на практиці визначення порядку дробової похідної необхідно визначати в ході розв'язування обернених задач. Очевидно, що методи фрактальної геометрії доцільно застосовувати у випадку застосування похідних дробового порядку за координатами. Якщо ж похідні дробового порядку використовуються за часом, то необхідно розвивати інші підходи до визначення порядків дробових похідних.

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. - Москва: Физматлит, 2003. – 272 с.
3. P'yanylo Ya. D., Lopuh N. B. Numerical model of mass transfer processes in porous environment // Task Quarterly. – 16, No 3-4, 2012.

FRACTAL DIMENSION AND DERIVATIVES OF FRACTIONAL ORDERS

In this paper we consider methods for determining the order of a fractional derivative in the processes of mass-transfer modeling in complex porous media. The results of a computational experiment based on experimental data are presented.

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ

Георгій Сулим¹, Йосиф Піскозуб²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка,

² Українська академія друкарства

gtsulym@gmail.com, piskozub@pancha.lviv.ua

Реальні матеріали й елементи конструкцій завжди мають неідеальну будову, містять дефекти мікро- та макроструктури у вигляді прошарків чужорідних середовищ, частинок вогнетривів, зон окисненого металу, тензодавачів, підкріплень, зварювальних та клейових з'єднань, заповнених деяким матеріалом тріщин тощо. Матеріали контактуючих тіл, їхні покриття чи прошарки між ними часто виготовлені з фізично нелінійного матеріалу. Клейові з'єднання у більшості випадків нелінійно пружні. Спільним в усіх вищезгаданих задачах є наявність у загальному випадку тонкого об'єкту (прошарку, включення, тріщини, плівки, неідеальності виду проковзування, шорсткості тощо) у зоні контакту тіл, що взаємодіють [2, 4, 5]. Причому властивості цього об'єкту можуть бути вибрані у найширшому спектрі: від термоізолюваної порожнини (тріщини) до теплоактивного в'язкопружного чи в'язкопластичного прошарку, наділеного певними реологічними властивостями. У цій публікації на прикладі антиплоскої задачі (див. рис.) описано загальний підхід до розв'язування описаного класу квазістатичних задач та побудови використаних у них моделей тонких включень-прошарків, матеріал яких має істотно нелі-

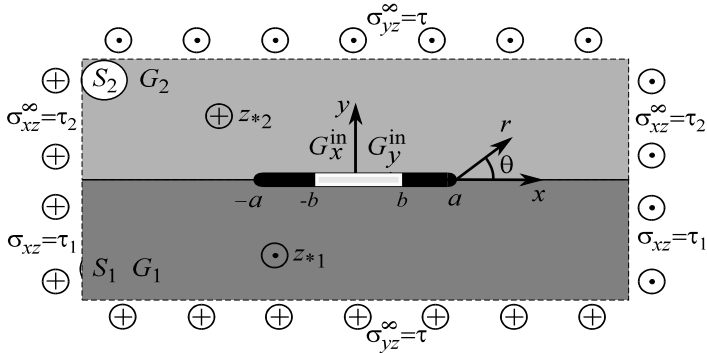


Рис. Схема контакту матеріалів через включення малої товщини $2h \ll 2a$

нійнні деформаційні властивості за різного навантаження тіла, в тому числі багатокрокового чи циклічного.

Якщо припустити, що стан матеріалу включення описують рівняння рівноваги та конститутивні рівняння загального виду

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{in}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{in}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \varpi_s(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}), \quad s = \{x, y\},$$

то математична модель фізично нелінійного включення матиме вигляд

$$-\frac{[w]_h}{h} = \left\langle \varpi_s(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) \right\rangle,$$

$$\left\langle \varpi_x^{-1} \left(\frac{\sigma_{xz}}{G_k}, \frac{\sigma_{yz}}{G_k} \right) \right\rangle_h - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \frac{1}{h} \int_{-a}^x [\sigma_{yz}]_h(\xi) d\xi = 0,$$

де $[\varphi]_h = \varphi(x, -h) - \varphi(x, +h)$, $\langle \varphi \rangle_h = \varphi(x, -h) + \varphi(x, +h)$.

Застосування до розв'язування задачі запропонованої раніше [1-3] методики дослідження впливу фрикційного контакту на деформування тіла з налягаючою тріщиною дає можливість отримати з поданої моделі включення систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІІР) зі змінними коефіцієнтами та додатковими умовами силового балансу й однозначності переміщень при обході навколо тонкого дефекту. Для розв'язування такої системи запропоновано збіжний ітераційний аналітико-числовий метод для різних варіантів нелінійного деформування [1, 4, 8], зокрема закону Рамберга-Осгуда. Розвинуту інкрементальну методику розрахунку напружено-деформованого стану тіла за довільного багатокрокового (у т. ч. циклічного) навантажування.

1. Піскозуб Й. З. Поздовжній зсув біматеріалу з нелінійно пружним міжфазним тонким включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2017. – Вип. 24. – С. 74-85.
2. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З. Нелінійне деформування тонкого міжфазного включення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 2017. – **53**, № 5. - С. 24-30.
4. Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З. Умови контактної взаємодії (огляд) // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 110–125.
5. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in power law hardening material // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1968. – **16**. – P. 1-12.

MODELING OF NONLINEAR CONTACT INTERACTION BETWEEN THE BODIES

The model of thin inclusion of substantially nonlinear and anisotropic mechanical properties is built. The incremental approach for solving the anti-plane problem for the bimaterial with thin physically nonlinear inclusion located on the materials interface is discussed. The method is based on the analytical solution of the anti-plane problem for a semi-homogeneous matrix with the interface discontinuity, exposed to the quasi-statically load. Using the jump functions and the coupling problem of boundary values of analytical functions methods we reduce the problem to the system of singular integral equations (SSIE) on jump functions with variable coefficients that enables to describe arbitrarily changing quasi-static loading (monotonic or not) and its impact on stress-strain state in the body with the heterogeneity based on incremental approach. A consistent iterative numerical-analytical method is offered to solve such SSIE.

Секція 2

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ МЕХАНІКИ ЗВ'ЯЗАНИХ ПОЛІВ

УДК 539.3

ПРО ВПЛИВ ДОМІШОК НА РОЗМІРНІ ЕФЕКТИ У НАНОПОРИСТИХ ТІЛАХ

Богдан Боженко^{1,2}, Тарас Нагірний^{1,3}, Костянтин Червінка⁴

¹ *Центр математичного моделювання ІППММ НАНУ,*

² *Opole University of Technology,*

³ *University of Zielona Góra,*

⁴ *Львівський національний університет імені Івана Франка*

b.bozhenko@po.opole.pl, t.nahimyj@gmail.com, k.tchervinka@gmail.com

Представлено модель структурно неоднорідного деформівного твердого розчину з врахуванням геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла. Утворення структури матеріалу та шорсткість поверхні описано із використанням методів термодинаміки нерівноважних процесів та нелінійної механіки спадкових середовищ. У розгляд введено вільну енергію гетерогенного (структурно неоднорідного) середовища, яка означена у просторі густин скелета ρ_0 та домішок ρ_1 , температури θ та тензора деформації \mathbf{e} . Шорсткість реальної поверхні тіла враховано шляхом задання приповерхневих джерел маси у рівнянні балансу маси для скелета [3]. У випадку, якщо джерела маси суттєво відмінні від нуля в усіх точках тіла, такі тіла можна трактувати, як пористі або нанопористі.

Якщо із розгляду виключити густину скелета, то дифузійне рівняння може бути приведено до вигляду

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} = b_1 \nabla^2 \theta + b_2 \nabla^2 \sigma + b_3 \nabla^2 \rho_1,$$

де σ – кульова складова тензора напружень, b_i – сталі ($i = 1, 2, 3$).

Для стаціонарного стану твердого розчину ключова система рівнянь є такою

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \mathbf{u}) - a_{m0} \nabla \rho_0 - a_{m1} \nabla \rho_1 &= 0, \\ a \nabla^2 \rho_0 + \nabla^2 \rho_1 &= 0, \\ \xi_m^{-2} \nabla^2 \rho_0 - \rho_0 + \rho_0^* - \rho_1 + \rho_1^* &= -d_{\sigma m}, \end{aligned}$$

де \mathbf{u} – вектор переміщення, $d_{\sigma m}$ – джерела маси, $1/\xi_m$ – характерний розмір області приповерхневої неоднорідності гетерогенного матеріалу без домішок, a , λ , μ , a_{m0} , a_{m1} – параметри матеріалу, ρ_0^* , ρ_1^* – густини скелета і домішок у відліковому стані.

Для стаціонарного режиму при нехтуванні джерелами маси для густини домішки отримано рівняння

$$\nabla^2 \rho_1 - \xi_m^2 (1 - a) \rho_1 = \Phi(\mathbf{r}),$$

яке співпадає з рівнянням дифузії домішкової речовини у середовищі з двома шляхами дифузії [1, 2]. Це дозволяє стверджувати, що запропонована модель врахує локальну неоднорідність (гетерогенність) матеріалу.

На основі дослідження зв'язаних полів у тонких плівках (шар $|x| \leq l$) вивчено вплив домішки на розмірні ефекти поверхневих напружень та межі міцності. Встановлено, що розподілам механо-дифузійних полів властиві два характерні розміри, один із яких пов'язаний із шорсткістю реальної поверхні тіла, інший – зі структурою матеріалу. Наявність домішок у тілі змінює характерний розмір, що пов'язаний з гетерогенністю матеріалу.

Розмірний ефект (залежність від параметра ξl) поверхневих напружень $\sigma_{yy}(l)$ (рис. 1) та межі міцності σ_a^{cr} (рис. 2) ілюструють рисунки, на яких лінії 1-3 відповідають різним параметрам шорсткості поверхні й структурної неоднорідності, пунктирні лінії відповідають відсутності домішок.

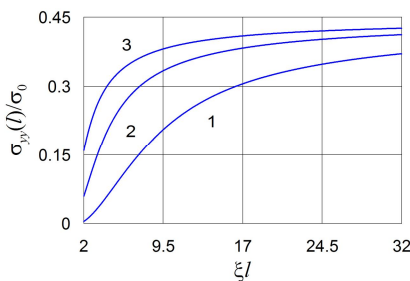


Рис. 1

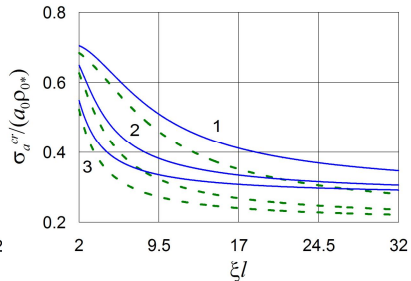


Рис. 2

Врахування шорсткості реальної поверхні тіла приводить до якісних та кількісних змін у розподілі механо-дифузійних полів у приповерхневій області масивних шарів, а також в усій області тонких плівок. Вказано, що вплив домішок на напружено-деформований стан та експлуатаційні характеристики може бути суттєвий.

1. Бурак Я.Й., Чапля С.Я. Континуальні моделі нелінійної термомеханіки бінарних систем // Физ.-хим.мех.матер. – 1995. – № 4. – С.7-15.
2. Aifantis E.C., Hill J.M. On the theory of diffusion in media with double diffusivity I. Basic mathematical results // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 1980. – 33 (1). –P. 1-21.
3. Nahirnyj T., Tchervinka K. Mathematical modeling of structural and near-surface non-homogeneities in thermoelastic thin films // Int. J. Engng. Sci. – 2015. – 91. – P. 49-62.

ON ADMIXTURES INFLUENCE ON SIZE EFFECTS IN NANOPOROUS SOLIDS

The thermomechanical model that describes structurally inhomogeneous solid solutions and accounts surface roughness is presented and analyzed using example of the thin film. The admixture and roughness influences on size effects including the strength size effect are studied.

УДК 681.5.015

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА КЕРУВАННЯ ПРОМИСЛОВИМИ СИСТЕМАМИ ШТУЧНОГО МІКРОКЛІМАТУ

Ігор Голінко

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

conis@ukr.net

Досягнення високих показників ефективності промислових систем штучного мікроклімату (СШМ) можливе лише за умови коректного керування обладнанням кондиціонера, що передбачає розробку адекватних математичних моделей та методів керування СШМ. У роботах [1, 2] розглянуто математичні моделі кліматичного обладнання кондиціонерів. Використовуючи концептуально-інтегральний підхід у [3] запропоновано методу розробки комплексної моделі СШМ в просторі станів:

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}; \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \end{cases} \quad (1)$$

що відкриває можливість використання сучасної теорії керування для розробки цифрової системи керування промисловим кондиціонером.

Постановка задачі синтезу лінійно-квадратичного цифрового регулятора (ЛКЦР). Нехай, модель СШМ у просторі станів задано (1). Потрібно синтезувати матрицю зворотного зв'язку \mathbf{K}_d ЛКЦР, яка за параметрами стану \mathbf{X} СШМ визначить траєкторію вектору оптимального впливу \mathbf{U}_s^o для $s = 1, 2, \dots, N-1$, що мінімізує квадратичний критерій якості:

$$I = \mathbf{X}_N^T \mathbf{S} \mathbf{X}_N + \sum_{s=0}^{N-1} \left[\mathbf{X}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{X}_s + \mathbf{U}_s^T \mathbf{R} \mathbf{U}_s \right], \quad (2)$$

де \mathbf{S} , \mathbf{Q} – вагові додатні напіввизначені матриці; \mathbf{R} – вагова симетрична додатна матриця; \mathbf{X}_s , \mathbf{U}_s – відповідно вектор стану та вектор керування.

Синтез ЛКЦР. Для якісної підтримки параметрів повітря на виході кондиціонера або у приміщенні вектор \mathbf{X} моделі (1) доповнимо вектором $\mathbf{Z}' = \mathbf{C}\mathbf{X}$, що забезпечить наявність інтегральної складової за змінними керування. В результаті розширена модель СШМ в прийме вигляд:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}; \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}. \end{cases} \quad (3)$$

Далі, приведемо модель СШМ (3) до дискретного виду

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{s+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{X}_s + \mathbf{B}_d \mathbf{U}_s, \\ \mathbf{Y}_s = \mathbf{C}_d \mathbf{X}_s \end{cases}, \text{ де } \mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T_{KV}}, \mathbf{B}_d = \int_0^{T_{KV}} e^{\mathbf{A}(T_{KV}-\tau)} \mathbf{B} d\tau. \quad (4)$$

Синтез оптимального ЛКЦР проведемо на основі розв'язку рівняння Ріккати. ЛКЦР в загальному випадку представляється залежністю

$$\mathbf{U}_s = -\mathbf{K}_d \mathbf{X}_s. \quad (5)$$

Регулятор формує керуючий вплив за станом змінних \mathbf{X}_s СШМ, використовуючи матрицю коефіцієнтів передачі \mathbf{K}_d , яка визначається як

$$\mathbf{K}_d = \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_d^T \mathbf{P} \mathbf{B}_d \right)^{-1} \mathbf{B}_d^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d. \quad (6)$$

Параметри ЛЦКР визначаються як результат розв'язку рівняння Ріккати. При $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ проводиться розв'язок матричного рівняння Ріккати

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \left[\mathbf{I} - \mathbf{B}_d \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_d^T \mathbf{P} \mathbf{B}_d \right)^{-1} \mathbf{B}_d^T \mathbf{P} \right] \mathbf{A}_d. \quad (7)$$

Використовуючи (1)–(7) синтезовано ЛКЦР на прикладі стельового кондиціонера CV-P 2L N-63B/F-N виробництва фірми VTS CLIMA. Імітаційне моделювання перехідних процесів для системи керування кондиціонером підтвердило ефективність запропонованої процедури синтезу. Використання системи керування із ЛКЦР покращує інтегральні показники якості у 1.5 – 2.5 рази порівняно зі системами, де використовуються одновимірні регулятори, також зменшується коливність та тривалість перехідних процесів, що пояснюється більшою кількістю змінних, за якими проводиться стабілізація керування величин.

1. *Голінко І. М.* Динамічна модель тепломасообміну для водяного охолоджувача промислового кондиціонера // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2014, № 6. – С. 27–34.
2. *Голінко І. М., Галицька І. Є., Степаненко В. Ю.* Математичне моделювання процесів тепло- та масообміну для камери парового зволоження // Прикарпатський вісник НТШ. – 2014, № 1(25). – С. 54–62.
3. *Голінко І. М.* Принципи синтезу автоматичних систем керування промисловими кондиціонерами // Автоматизація технологічних і бізнес-процесів. – 2016. – № 8. – С. 33–42.

MATHEMATICAL MODELING AND CONTROL OF INDUSTRIAL CONDITIONING SYSTEMS

A mathematical model of multidimensional automatic control system synthesis for industrial air-conditioner is examined. The complex dynamic model of the industrial air conditioner in state space is obtained. Synthesis procedure of a multidimensional linearly-quadratic digital control with integral component for the industrial air conditioner is suggested. The mathematical models are recommended to be used by automation specialist for synthesis and analysis of control systems.

УДК 532.595

**МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ БІЛЯРЕЗОНАНСНИХ ЕФЕКТІВ
У СИСТЕМІ «РІДИНА З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ –
НЕЦИЛІНДРИЧНИЙ РЕЗЕРВУАР»****Олег Лимарченко, Олександр Кліменков***Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

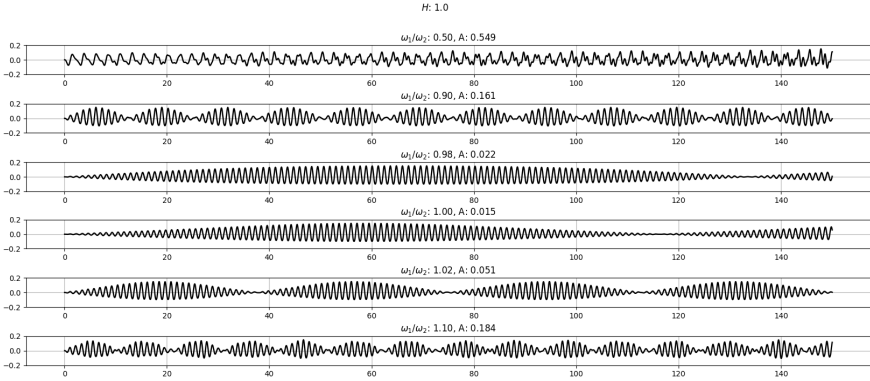
olelim2010@yahoo.com

Для системи резервуар – рідина з вільною поверхнею характерним є щільне розташування частот і суттєвий прояв нелінійних властивостей. Значне ускладнення в системі відбувається через врахування сумісного характеру руху резервуара і рідини, що призводить до зміни частот, які відповідають антисиметричним формам коливань в залежності від співвідношення мас рідини і резервуару. Нові експериментальні результати свідчать про дуже складні прояви нелінійних ефектів в околі резонансних частот збудження системи. Більших сучасних теоретичних досліджень в цій галузі не дають адекватного уявлення про характер процесів в околі резонансу.

У рамках безвихрового руху ідеальної однорідної нестисливої рідини, яка частково заповнює рухомий резервуар, методом модальної декомпозиції задача зводиться до нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів збудження форм коливань рідини і параметрів поступального руху резервуара. Розглядається сумісний рух системи для різних частот збудження поступального горизонтального руху резервуара. Методика була реалізована для випадку резервуара еліптичної форми. На рисунку приведено характер зміни в часі збурень вільної поверхні рідини для сфери з рівнем заповнення, що дорівнює радіусу.

Характер зміни збурень вільної поверхні свідчить про суттєвий прояв нелінійних ефектів і ефектів, обумовлених сумісним характером руху складових компонент системи, які більшістю існуючих теоретичних досліджень не враховуються однак підтверджуються експериментами. Додаткову увагу зосереджено на виконанні умов розв'язності задачі про коливання рідини в нециліндричному резервуарі, які значною мірою зводяться до задачі про побудову форм коливань рідини, що задовільняють умовам неперетікання на стінках резервуару не лише нижче рівня незбуреної вільної поверхні, а й на певному продовженні стінок резервуару над вільною поверхнею. Встановлено:

- Резонансні явища спостерігаються не на парціальних частотах коливань вільної поверхні рідини, а на власних частотах, які можуть за



певних співвідношень мас резервуару і рідини відрізняться на 70-100%.

- Помітний суттєвий внесок ефектів модуляції, обумовлених як різницею частоти збудження і власної частоти коливань системи, так і залежністю частоти коливань від амплітуди, що суттєво проявляється в безпосередньому околі резонансу.
- Прояв внеску вищих гармонік спектра і дрейфу середнього значення зміни амплітуд збурення вільної поверхні рідини є суттєвим лише в дорезонансному діапазоні збудження.
- Частота модуляції коливань залежить від різниці між частотою збудження і власною частотою (на малюнку це помітно для співвідношення частот 0.9 і 1.1). Ця властивість спотворюється в околі резонансу через залежність частоти коливань від амплітуди, а також при більшому рознесенні частот, коли через щільність розташування частот починає проявлятися наближення до іншої резонансної зони.
- В усіх режимах збудження руху системи не спостерігається вихід системи на усталений режим коливань, який прогнозується більшістю сучасних теоретичних досліджень.
-

Проведене дослідження показує, що шляхом адекватного моделювання поведінки системи в околі резонансу встановлено закономірності динамічної поведінки системи резервуар – рідина, які узгоджуються якісно з експериментальними даними.

MODELING OF NONLINEAR NEAR-RESONANCE EFFECTS IN THE SYSTEM “LIQUID WITH A FREE SURFACE – NON-CYLINDRICAL RESERVOIR”

An analysis of the system “reservoir with a free surfaced liquid” dynamical behavior in a vicinity of resonance is done. The mathematical model includes three new factors, namely,

combined character of motion of reservoir and liquid, verification of all necessary conditions of the problem solvability, considering the set of normal modes, which is responsible for not only forced oscillations of the system in linear statement, but for different combination modes of motion too. The obtained results are evidence of good concordance of the results of theoretical and numerical modeling of dynamical processes.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНОК ЕФЕКТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ШАРУВАТИХ, СКЕЛЕТНИХ ТА СТРІЧКОВИХ МАГНІТОЕЛЕКТРИЧНИХ КОМПЗИТІВ

Георгій Сулим¹, Ярослав Пастернак²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка

²Луцький національний технічний університет

gtsulym@gmail.com, yaroslav.pasternak@gmail.com

Стрімкий розвиток технології виготовлення сучасних композитних матеріалів зумовлює високий інтерес науковців та інженерів до розробки високоточних підходів, що дозволили б на стадії проектування композицій визначити та оптимізувати їхні ефективні механічні, діелектричні, магнітні, п'єзоелектричні, п'єзوماгнітні та магнітоелектричні характеристики.

Одним із ефективних числово-аналітичних підходів вивчення напружено-деформованого стану структурно неоднорідних тіл є метод граничних елементів. Зокрема, нещодавно для магнітоелектропружних матеріалів із подвійно періодичними системами, обмежених представницьким елементом тонких неоднорідностей [1], розроблено спеціальні інтегральні рівняння та метод граничних елементів, що вимагає дискретизації лише межі базової тонкої неоднорідності.

У цьому дослідженні результати роботи [1] поширюються на випадок, коли тонкі неоднорідності взаємодіють між собою у сусідніх представницьких елементах подвійно періодичної структури матеріалу. З цією метою доповнено розвинуті раніше моделі тонких неоднорідностей циклічними сталими, що є шуканими величинами та залежать від механічних та геометричних особливостей задачі. У свою чергу, це дало можливість моделювати ефективні характеристики матеріалів із шаруватою та скелетною (ендоскелетною) структурою.

1. *Pasternak Ia.* Doubly periodic arrays of cracks and thin inhomogeneities in an infinite magneto-electroelastic medium // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2012. – 36. – No. 5. – P. 799–811.

MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTATION OF EFFECTIVE PROPERTIES OF LAYERED, SKELETON AND RIBBON-LIKE MAGNETOELECTRIC COMPOSITES

Present study concerns problems for determination of effective properties of magneto-electric composites with periodic structure, including materials with internal continuous thin-walled skeleton. Solution of considered problems incorporates development of new models of thin inclusions for doubly periodic magneto-electroelasticity, which can account for periodic conditions on their end, and thus model continuous layers or skeletons.

УДК 539.3

**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АДВЕКЦІЇ-ДИFUЗІЇ
У СЕРЕДОВИЩІ З ТОНКИМ КАНАЛОМ**

Ярема Савула, Іван Дияк, Наталя Мазуряк

Львівський національний університет імені Івана Франка

yarema.savula@lnu.edu.ua

У процесі математичного моделювання явища переносу у реальних середовищах виникає необхідність урахування тонких включень в основне середовище а також неоднорідної структури основного середовища. З цією метою розвинуто підхід до побудови гетерогенних математичних моделей адвекції-дифузії шляхом пониження вимірності моделі переносу у тонкому включенні [1, 4]. Для урахування неоднорідної структури основного середовища вивчено можливості застосування різномасштабного методу скінченних елементів, який базується на методі Гльоркіна-Петрова [2, 3].

Розглядається задача адвекції-дифузії у середовищі з тонким каналом малої товщини, яка описується рівняннями

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - d \operatorname{div}(\mathbf{D} \operatorname{grad} U) + \mathbf{W} \operatorname{grad} U = q, \quad \tau \times x_1, x_2 \in (0, \gamma] \times \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau} - d_1 \operatorname{div}(\mathbf{D}_1 \operatorname{grad} U_1) + \mathbf{W}_1 \operatorname{grad} U_1 + r_1 U_1 = q_1, \quad \tau \times x_1, x_2 \in (0, \gamma] \times \Omega_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \tau} - d_2 \operatorname{div}(\mathbf{D}_2 \operatorname{grad} U_2) + \mathbf{W}_2 \operatorname{grad} U_2 + r_2 U_2 = q_2, \quad \tau \times x_1, x_2 \in (0, \gamma] \times \Omega_2. \quad (3)$$

З урахуванням малої товщини в рівнянні (1) з використанням варіаційного підходу виконується пониження вимірності до одновимірної задачі. У результаті отримується гетерогенна математична модель [1].

Для числового аналізу гетерогенної математичної моделі застосовується різномасштабний метод скінченних елементів, який базується на ідеї методу Гальоркіна-Петрова і спеціальному виборі базисних функцій [2]. Показано, що цей метод дає можливість, окрім урахування неоднорідності середовища, добре ліквідувати явище нестійкості числових схем для великих чисел Пекле. Це відбувається за рахунок спеціального вибору базисних функцій, які зображені на рисунку.

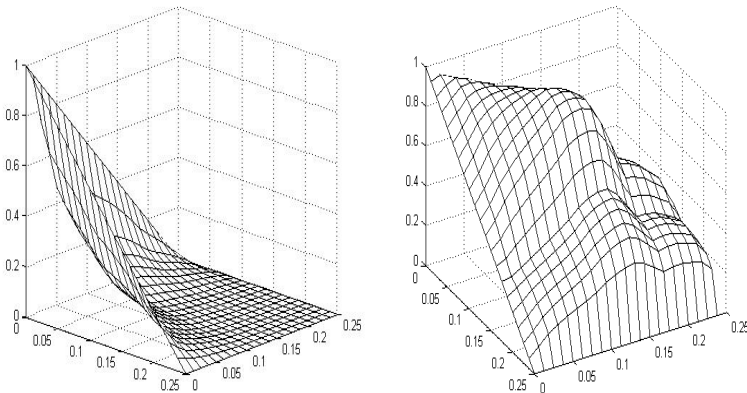


Рис. Вигляд різномасштабних базисних функцій при $Pe = 0$ та $Pe = 100$ відповідно

1. *Savula Ya.H.* Numerical analysis of advection-diffusion in the continuum with thin canal / *Savula Ya.H. Koucharskyi V.M. Chaplia Ye. Ya.* // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology. – **33**, No 3. – P. 341-351.
2. *Efendiev Y., Hou T.* Multiscale finite element methods. Theory and application. – Springer, 2009. –234 p. – (Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences; vol. 4).
3. *Сподар Н., Савула Я.* Застосування різномасштабного методу скінченних елементів до розв’язування одновимірної задачі адвекції-дифузії // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – Вип. 19. – С. 190-197.
4. *Mazuriak N., Savula Ya.* Numerical analysis of the advection-diffusion problems in thin courvilinear channel based on multiscale finite element method // Mathematical Modeling and Computing. – 2017. – **4**, No. 1. – P. 59-68.

COMPUTER MODELING OF ADVECTION-DIFFUSION
IN THE CONTINUUM WITH THIN CANAL

The approach to constructing heterogeneous mathematical models of advection-diffusion in a medium with a thin inclusion is developed. The multiscale finite element method is used for numerical analysis of the corresponding initial-boundary problems. It is shown that this method gives a stable scheme for large Peclet numbers and give satisfactory results in the case of a heterogeneous medium.

УДК 539.3

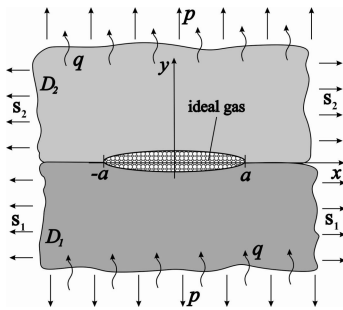
ЕФЕКТ НАПРЯМЛЕНОСТІ ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ
У БІМАТЕРІАЛІ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ,
ЗАПОВНЕНОЮ ІДЕАЛЬНИМ ГАЗОМ

Христина Середницька

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

labmtd@iapmm.lviv.ua

Розглянемо задачу термопружності для біматеріалу, в якому реалізується стан плоскої деформації. Біматеріал складається з двох півплощин D_1 і D_2 ,



матеріали яких наділені різними термомеханічними властивостями. На межі з'єднання півплощин D_1 і D_2 розташована тріщина завдовжки $2a$ (рисунок). На безмежності до біматеріалу прикладено рівномірно розподілене розтягувальне навантаження p та однорідний тепловий потік q , а також додаткові зусилля S_1, S_2 [1]. Порожнина тріщини заповнена ідеальним газом з коефіцієнтом теплопровідності λ_g , що чинить тиск P_g на береги тріщини.

Тиск газу P_g визначаємо з рівняння Клапейрона-Менделєєва $P_g V_g = m_g R T_g / \mu_g$, де m_g і V_g – маса і об'єм газу, що припадають на одиницю довжини тріщини l в перпендикулярному до площини рисунка напрямі, T_g – температура газу, R – універсальна газова стала, μ_g – молярна маса газу. Вплив газу на теплопередачу між берегами тріщини

моделюємо термоопором $r(x) = h(x)/\lambda_g$, який залежить від розкриття тріщини $h(x)$.

З використанням викладеного у праці [1] методу сформульовану задачу термопружності зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибка температури $\gamma(x)$ та розкриття тріщини $h(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t)}{t-x} dt + \frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma(x) + \frac{m_g RT_g}{2G^* \mu_g l \int_{-a}^a h(x) dx} = -\frac{1}{2G^*} p, \quad h(\pm a) = 0, \quad |x| < a, \quad (1)$$

$$\lambda_g \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad \gamma(\pm a) = 0, \quad |x| < a, \quad (2)$$

де $\lambda = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$, $G^* = G_1(1 - \kappa_2)/(1 - \kappa_1\kappa_2)$, $\kappa_n = 3 - 4\nu_n$; $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$; ν_n – коефіцієнт Пуассона, G_n – модуль зсуву, α_n – коефіцієнт лінійного теплового розширення, λ_n – коефіцієнт теплопровідності, $\eta_n = \alpha_n(1 + \nu_n)/\lambda_n$ – термічна дистортивність (ТД) півплощини D_n ($n = 1, 2$).

Розв'язок системи (1), (2) істотно залежить від параметра η^- , що характеризує різницю термічних дистортивностей матеріалів D_1 і D_2 . Вважаємо, що $\eta^- \neq 0$. Якщо $q\eta^- > 0$, то тепловий потік скерований до матеріалу з більшою ТД, якщо ж $q\eta^- < 0$ – то до матеріалу з меншою ТД. Для кожного з цих випадків побудовано аналітично-числові процедури для визначення функцій $\gamma(x)$ та $h(x)$.

На основі числових розрахунків встановлено якісно різну залежність розподілу стрибка температури та розкриття тріщини від густини теплового потоку при зміні його напрямку. Такий результат в літературі називають ефектом напрямленості теплового потоку. Кількісно ефект напрямленості теплового потоку характеризує параметр термічної ректифікації $\delta = \left| R_{\max}^+ - R_{\max}^- \right| / \left| R_{\max}^+ \right| \cdot 100\%$, де R_{\max}^+ і R_{\max}^- – максимальні значення міжфазного термоопору у випадку теплового потоку скерованого до матеріалу з більшою ТД і до матеріалу з меншою ТД відповідно.

На основі числових розрахунків побудовано розподіл міжфазного термоопору між берегами тріщини для двох напрямів теплового потоку. Проаналізовано залежність параметра термічної ректифікації від густини тепло-

вого потоку для різних значень інтенсивності розтягувальних зусиль, маси газу та коефіцієнта теплопровідності газу.

1. *Мартиняк Р. М., Середницька Х. І.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.

THE HEAT FLOW DIRECTIONAL EFFECT IN BIMATERIAL WITH INTERFACE CRACK FILLED WITH AN IDEAL GAS

A thermo-stressed state of a bi-material with an ideal gas-filled interface crack under the action of uniform tensile load and heat flow is investigated. The gas exerts pressure on the crack surfaces and causes thermal resistance proportional to the crack opening. The heat flow directional effect for interface thermal resistance is analyzed. The dependence of thermal rectification on the heat flow for different gas mass and its heat conductivity is established.

УДК 536.2

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПРИРОДНИХ УТВОРЕНЬ ЗЕМНОЇ ПОВЕРХНІ

Євген Чапля¹, Богдан Гера²

¹ *Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України*

² *Дніпровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна*

chaplia@cmm.lviv.ua, gera-zen@ukr.net

Однією з проблем при формулюванні вихідних модельних співвідношень для температури земної поверхні є врахування в явному вигляді впливу структури середовища. Так, внаслідок процесів типу фазових перетворень, пов'язаних з випаровуванням і конденсацією, дифузією частинок змінюється склад, а за певних умов і структура приповерхневого шару. При незначних його змінах достатньо врахування взаємозв'язаності процесів теплопереносу і провідності, дифузії, зміни стану води, що протікають у природних умовах. У ряді випадків для спрощення аналізу процесів переносу у дрібнодисперсних тілах доцільно використовувати усереднені характеристики, котрі узагальнено враховують вплив структури середовища. При цьому окрема увага приділяється умовам на границі розділу земної поверхні з шарами повітря [1].

Приведені рівняння і співвідношення моделі теплообміну у приповерхневому шарі землі та на поверхні розділу атмосфера-земля. Наведено постановки і отримані розв'язки обернених задач теплопровідності для визначення теплофізичних характеристик природних утворень земної поверхні,

орієнтованих на використання даних дистанційних і наземних вимірювань. Зокрема, досліджено розв'язок задачі визначення коефіцієнта теплового випромінювання, теплової інерції, а також сумісного визначення кількох характеристик. Вивчено вплив теплового ефекту геотермальних потоків тепла на розв'язуваність задачі за припущення про періодичність у часі умов теплообміну на поверхні.

Обчислювальний експеримент проводився з вхідними даними для температури, що забезпечують баланс теплових потоків. При використанні ж реальних даних, внаслідок неточності вимірювань, значення знайдених характеристик із розв'язку оберненої задачі можуть відхилятися від дійсних. У цьому випадку, для наближення їх до реальних, розрахункова схема може бути модифікована таким чином, щоб пошук невідомих параметрів відбувався в опуклій замкнутій обмеженій області, а також залучалася додатково апріорна інформація щодо особливостей місцевості.

1. *Pidstrigach Ya. S., Karas'ov O. B., Gera B. V., Zhuk P. A., Chaplya E. Ya.* Mathematical modeling of heat-moisture transfer in soil and the problem of interpretation of data of remote sensing of the earth's surface // *Journal of Soviet Mathematics*, 1993. – 67, Issue 2. – P. 2818–2829.

INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS FOR THE LAND SURFACE LAYER

The inverse heat conduction problem for obtaining the characteristics of upper layer of soil with natural boundary conditions on its surface is considered. The operational scheme of analysis time periodic temperature function of layer with surface condition of heat exchange which contain convection and radiation partials is proposed.

УДК 539.3

ДО ПОБУДОВИ ЛОКАЛЬНО ГРАДІЄНТНОЇ ТЕОРІЇ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ В'ЯЗКИХ РІДИН

Євген Чапля^{1,2}, Ольга Грицина¹

¹ Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

² Університет Казимира Великого, Польща

czapla@ukw.edu.pl, gryt045@gmail.com

Сформульовано замкнену систему співвідношень узагальненої (градієнтного типу) математичної моделі в'язкої стисливої рідини, яка є багатокомпонентним хімічно інертним розчином, що складається з підсистем розчинника (підсистема n) та домішок (підсистеми 1, ..., $(n - 1)$). Модель враховує взаємо-

зв'язок механічних, теплових і дифузійних процесів із локальним зміщенням маси. З останнім пов'язано потоки маси недифузійної і неконвективної природи, зумовлені зміною структури розчинника [1, 2]. Замкнена система рівнянь моделі охоплює балансові рівняння, визначальні та геометричні співвідношення. Наслідком урахування локального зміщення маси підсистеми розчинника є нелокальні рівняння стану і підвищення порядку розв'язувальної системи рівнянь.

Розроблена математична модель нестисливої в'язкої рідини може бути ефективно використана для дослідження впливу приповерхневих ефектів на дифузію домішок у ній, вивчення капілярних явищ і закономірностей зв'язаних полів у разі прискореного руху рідини тощо.

Показано, що, на відміну від класичної теорії, сформульована система співвідношень у стаціонарному наближенні дозволяє обґрунтувати експериментально спостережувану появу розклинювального тиску у тонких (завтовшки у 5–10 нм) прошарках рідини [3, 4]. Одержано аналітичну формулу, яка пов'язує величину розклинювального тиску з товщиною рідкої плівки. Аналіз отриманих результатів засвідчив, що розклинювальний тиск може суттєво вплинути на механічні характеристики деформівних твердих тіл, що містять тонкі прошарки рідини нанометрового масштабу. З огляду на це врахування такого тиску є вкрай важливим при дослідженні малорозмірних об'єктів.

1. Бурак Я. Й., Чапля С. Я., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 45–49.
2. Грицина О. Узагальнена континуально-феноменологічна модель в'язкої рідини: урахування локального зміщення маси // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 1. – С. 161-170.
3. Дерягин Б. В., Чураев Н. В. Смачивающие пленки. – Москва: Наука, 1984. – 160 с.
4. Дерягин Б. В., Чураев Н. В. К вопросу об опеределении понятия расклинивающего давления и его роли в равновесии и течении тонких пленок // Коллоид. журн. – 1976. – 38, № 3. – С. 438-448.

ON THE FORMULATION OF LOCAL GRADIENT THEORY FOR MULTICOMPONENT VISCOUS LIQUIDS

Using the methods of nonequilibrium thermodynamics and fluid mechanics, a complete set of equations of gradient type theory of viscous incompressible liquid is formulated. As a result of local mass displacement accounting the nonlocal constitutive equations are obtained. It is shown that the local gradient theory of viscous liquid describes the existence of the disjoining pressure in thin liquid films. The analytical formula which couples the disjoining pressure and film thickness is obtained.

УДК 532.72:517.958:004.2:004.942

КОНТИНУАЛЬНІ МОДЕЛІ ГЕТЕРОДИFUЗІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСЕННЯ РОЗПАДНИХ РЕЧОВИН У ТІЛАХ З МІКРОСТРУКТУРОЮ

Євген Чапля^{1,3}, Ольга Чернуха^{1,2}, Юрій Білушак^{1,2}

¹ Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

² Національний університет "Львівська політехніка"

³ Університет Казимира Великого у Бидгощі, Польща

czapla@ukw.edu.pl, zaliznuchna6@gmail.com, byixx13@gmail.com

Континуальні моделі процесів переносу складових компонент тіла широко використовують у різних галузях науки і техніки. На їх основі здійснюють моніторинг техногенних субстанцій в оточуючому середовищі, прогнозують захищеність підземних вод від поверхневих забруднень, оцінюють надійність інженерних споруд для зберігання агресивних сполук. Окреме застосування такі моделі знаходять в техніці при описі процесів корозії чи деградації матеріалів, прогнозуванні надійності і довговічності поверхневих покриттів.

За континуально-термодинамічним підходом побудовано вихідні нелінійні співвідношення математичної моделі термомеханогетеродифузії у середовищі з пастками за каскадного розпаду домішкових частинок, які складаються з балансових рівнянь маси компонент і тіла в цілому, імпульсу, потенціальної, кінетичної, внутрішньої та повної енергії, ентропії, а також рівнянь стану та кінетичних співвідношень. Запропонований варіант лінеаризації рівнянь стану та кінетичних співвідношень та побудована ключова система рівнянь термомеханогетеродифузії у багатокомпонентному тілі з урахуванням каскадного розпаду частинок домішки у випадку вибору в якості розв'язуючих функцій температури, густини тіла, вектора переміщення точок континууму центрів мас та концентрації домішкових компонент, у т. ч. тих, що утворилися в наслідок розпаду. Отримано часткові варіанти математичної моделі механотермогетеродифузії у середовищі з пастками за каскадного розпаду мігруючих речовин за умов термодинамічної рівноваги щодо процесів переходу частинок між різними станами.

Для випадку реалізації в термодинамічній системі умови локальної термодинамічної рівноваги між станами мігруючих речовин в адсорбованих шарах води та в об'ємі скелета досліджено гетеродифузію за каскадного розпаду частинок у шарі за крайових умов I-го роду. Для конкретної схеми розпаду сформульовані зв'язані крайові задачі каскадного типу, коли концентрація частинок на певному кроці розпаду є джерелом маси розпадної речовини на

наступному кроці, яка теж дифундує, сорбується, десорбується і розпадається. Розроблений аналітико-ітераційний метод побудови розв'язків крайових задач гетеродифузії каскадного типу. За цим методом отримані розв'язки зв'язаних крайових задач каскадного типу, що побудовані за ітераційною процедурою з використанням функцій Гріна.

На основі отриманих формул розроблений пакет програм Geterpas для комп'ютерного моделювання гетеродифузійних процесів за каскадного розпаду домішкових речовин.

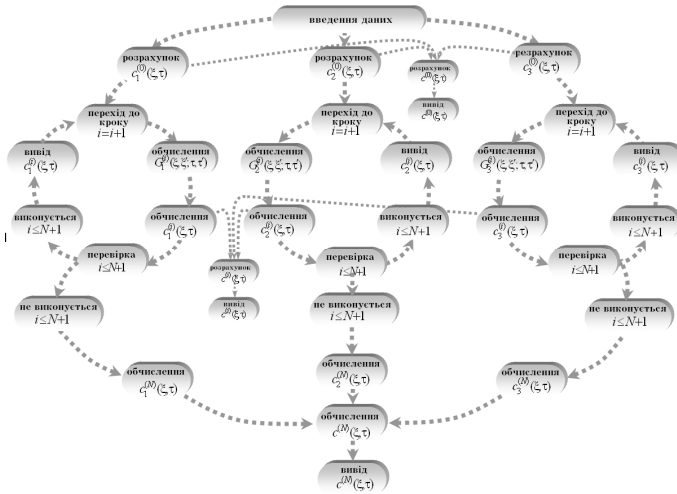


Рис. Схема модуля розрахунку концентрацій домішкових компонент комплексу програм пакету GeterPas

Знайдено та кількісно досліджено концентрації та потоки маси мігруючих компонент, а також визначено кількість відповідних речовин, що за певний проміжок часу пройшли через одиницю площі деякої поверхні, наприклад, через нижню границю шару. Показано, що на I-му етапі розпаду найінтенсивнішими є потоки домішки через перерізи біля поверхні тіла, де діє джерело маси, а з віддаленням перерізу від джерела інтенсивність потоку подає.

CONTINUUM MODELS OF HETERODIFFUSIVE MASS TRANSFER OF DECAYING SUBSTANCES IN BODIES WITH MICROSTRUCTURE

The approaches and methods for investigation of heterodiffusive mass transfer accompanied by decay of migrating particles are proposed. By methods of thermodynamics of non-equilibrium processes the mathematical of thermomechanoheterodiffusion under cascade decay of admixture particles. The statements are formulated and a number of initial-boundary value problems of heterodiffusion are solved for determination of migrating substance concentration, mass flows and quantity of substance passed through a layer.

COMPUTER-BASED SYSTEMS FOR MONITORING AND CONTROL OF INDUSTRIAL PROCESSES

Joanna Rut, Tomasz Wolczański

*Opole University of Technology,
Faculty of Production Engineering and Logistics, Poland*

j.rut@po.opole.pl, t.wolczanski@po.opole.pl

Introduction. Modern, dynamically changing market puts a lot of pressure on manufacturing companies, which, in order to maintain a competitive advantage, must constantly improve their production processes. The search for new solutions in the field of production management results from the fact that rapid changes taking place on the market in production and information technologies radically change the basic trends in the organization of manufacturing processes [1]. Computer information systems supporting complicated production processes are particularly important in manufacturing enterprises. They streamline the supervision of the production process, flow of information and process data.

The aim of the study is to present the importance and possibilities of computer systems that monitor and control the manufacturing process as well as to introduce potential benefits resulting from their application.

Advanced information technology. Contemporary enterprises are willing to invest in advanced computer systems because they perceive them as an effective tool for achieving satisfactory results [2]. Computer systems enable production planning and supervision of production processes. What is more, they allow for the collection, processing and presentation of information from the production process. They also give possibility to visualize production processes. Thanks to modern information technology, enterprises have the opportunity to develop and gain a competitive advantage on the market. Today, advanced information technology has become an inseparable element of every enterprise.

Production supervision and control - full control of production processes. The structure of production processes implemented in enterprises is very complex. Production companies often strive for a total control of each production stage, which favours the implementation of comprehensive and/or advanced computer systems covering the area of production monitoring and control. Production supervisory systems give the ability to plan and carry out production in controlled conditions, so they mainly collect and store production data. Among the many available IT solutions, MES (Manufacturing Execution Systems) systems must be enumerated because they provide a source of reliable knowledge from production lines. Thanks to them it is possible to track: production processes, current performance of the production processes as well as efficiency of machines and devices. SCADA systems enable ongoing analysis of the production process and

contribute to the optimal use of the potential of production lines by increasing their efficiency. APS (Advanced Planning and Scheduling) ensure optimization of the production process without the need to invest in a machine park.

In industrial practice, management and control of production processes is usually carried out using PLC (Programmable Logic Controller). PLC controllers are industrial computers whose task is not only to collect and process information but also control the operation of machines, devices and entire process lines in an open and/or closed system. PLC controllers are currently the basic control element of modern, technological processes occurring in almost every branch of industry. Available modern IT solutions to control the production process allow for many benefits such as increasing the speed of the decision making process, reducing production costs, reducing downtime, increasing productivity, shortening the production cycle time, faster flow of information and process data, rational use of enterprise resources.

Summary. Today the powerful capabilities of computer systems and control of production processes in the field of collection, storage, transfer, transmission, processing, visualization, and presentation of information, providing access to updated information in no time. Currently, the functioning of enterprises without the support of computer information systems is very difficult.

1. *Pałucha K.* Współczesne metody wspomagające zarządzanie produkcją, http://delibra.bg.polsl.pl/Content/27264/BCPS_30970_-_Wspolczesne-metody-w_0000.pdf (accessed 28 March 2018).
2. *Parys T.* Systemy informatyczne wspomagające zarządzanie produkcją i logistyką, <http://www.wnp.pl/wiadomosci/systemy-informatyczne-wspomagajace-zarzadzanie-produkcja-i-logistyka,-7857.html> (accessed 4 April 2018).

Секція 3

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ, ТЕРМО- ТА НАНОМЕХАНІКИ

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛОВИХ І МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОДНО- І ДВОШАРОВИХ КОНСТРУКЦІЙНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ІМПУЛЬСНІЙ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІЙ ОБРОБЦІ ЗА ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОЇ ПЛАСТИНИ

**Ара Аветисян¹, Роман Кушнір²,
Роман Мусій³, Наталія Мельник²**

¹ Інститут механіки АН Республіки Вірменії

*² Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

³ Національний університет «Львівська політехніка»

musiy@lp.edu.ua, melnyk.n.pz@gmail.com

У сучасній інженерній практиці широко використовують одно- і двошарові електропровідні конструкційні елементи. У процесі їх виготовлення та експлуатації вони часто піддаються дії імпульсного електромагнітного поля (ІЕМП). Розробка раціональних режимів такої експлуатації чи імпульсних електромагнітних технологій тісно пов'язана з опрацюванням ефективних методів моделювання та дослідження теплових і механічних процесів, що виникають у згаданих конструктивних елементах за дії ІЕМП. Це дає можливість прогнозувати працездатність відповідних електропровідних конструкцій з метою зберегти властивості наявних у них контактних з'єднань. Критерієм такого прогнозування є: не перевищення інтенсивністю напружень, які виникають в одно- і двошарових елементах пристроїв та виробів, допустимих значень в областях шарів чи на поверхнях їх з'єднання, а також і

запобігання виникненню пластичних деформацій, залишкових напружень та короблення конструкцій.

Для дослідження теплових і механічних властивостей одно- і двошарових конструкційних елементів за дії ІЕМП використано модель електропровідної пластини за такої дії. Приймається, що матеріали складових шарів елемента однорідні, ізотропні та неферромагнітні, а їх фізико-механічні характеристики не залежать від температури. Діюче ІЕМП належить до класу імпульсних «неруйнівних» ЕМП. Зовнішні поверхні елемента теплоізолювані від довкілля і вільні від силового навантаження. На поверхні з'єднання складових шарів виконуються умови ідеального електромагнітного, теплового і механічного контактів [3]. Враховується два фізичні чинники дії ІЕМП – джоулеве тепло $Q^{(n)}$ та пондеромоторні сили $\mathbf{F}^{(n)}$ у кожному шарі складового елемента. Ці два фізичні чинники зумовлюють виникнення нестационарної температури $T^{(n)}$ і напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$ (які визначають інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)} = \sqrt{(3I_2(\hat{\sigma}^{(n)}) - I_1^2(\hat{\sigma}^{(n)}))} / 2$ в n -му шарі та відповідний термонапружений стан досліджуваного елемента).

За виконання умов $\max \sigma_i^{(n)} \geq \sigma_d^{(n)}$ та $\max \sigma_i^{(n)*} \geq \sigma_M$ в одно- чи двошаровому елементі втрачаються несуча здатність і властивості контактного з'єднання (тут $\sigma_d^{(n)}$ – межа пружної деформації матеріалу n -го шару, $\sigma_i^{(n)*}$ – інтенсивність напружень в складових шарах на поверхні їх з'єднання, σ_M – межа міцності контактного з'єднання [2]).

На основі такої моделі досліджено закономірності зміни теплових і механічних властивостей одно- і двошарових електропровідних пластин за дії ІЕМП конкретних типів (за режимів: з модульною амплітудою, згасною синусоїдою та одиничного імпульсу) [1, 4].

1. Гаевская Л., Мельник Н., Мусий Р., Станик-Бэслер А. Модель электропроводного биметаллического слоя при воздействии однородного нестационарного электромагнитного поля // Manufacturing processes. Actual Problems – 2017. – 2: Modelling and optimization of manufacturing processes. Studia i monografie z. 473 (pod red. nauk.: O. Hachkevych, A. Stanik-Besler, T. Wołczański). Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole, 2017. – С. 124-133
2. Мэттьюз Ф., Ролингс Р. С. Композитные материалы. Механика и технология / М.: Техносфера, 2004. – 408 с.
3. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В. Термоупругость электропроводных тел. – К.: Наук. думка, 1977. – 248 с.
4. Гачкевич О. Р., Мусий Р. С., Д. В. Тарлаковський Термомеханіка неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди – Львів: СПОЛОМ. 2011. – 216с.

MODELING AND STUDY OF THERMAL AND MECHANICAL
PROPERTIES OF ONE- AND TWO-LAYERED STRUCTURAL ELEMENTS
IN IMPULSIVE ELECTROMAGNETIC TREATMENTS
USING THE ELECTROCONDUCTIVE PLATE MODEL

A mathematical model for studying the thermal and mechanical properties of single- and two-layered electroconductive elements under the action of pulsed electromagnetic fields is proposed.

УДК 539.3:548.43

ДО ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ
БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ В УМОВАХ
ТЕПЛО- І МАСООБМІНУ ТА РЕКРИСТАЛІЗАЦІЇ

Богдан Боженко^{1,2}, Олексій Онишко³,
Любов Онишко⁴, Євген Чапля^{1,5}

¹ Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

² Опольська політехніка, Польща

³ Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,

⁴ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України,

⁵ Університет Казимира Великого, Польща

b.bozhenko@po.opole.pl, onyszko@ukr.net

Як відомо, при термомеханічній обробці металів та сплавів у певному діапазоні температур суттєву роль відіграє рекристалізація [2]. При цьому в багатьох випадках, зокрема, в системах «плівка – підкладка», відбуваються і дифузійні процеси [3]. Тому для розрахунку оптимальних режимів зміцнювальної обробки тіл, виготовлених із конструкційних металевих матеріалів, необхідно побудувати математичну модель для кількісного опису деформування твердих тіл у взаємозв'язку з процесами теплопровідності, рекристалізації та дифузії.

Пропонована робота присвячена розв'язанню цього завдання на основі відомих експериментальних фактів [3] з використанням методів механіки суцільного середовища, нерівноважної термодинаміки та одержаних раніше результатів для моделей, що описують деформаційні та теплові процеси у взаємозв'язку з рекристалізацією [1, 4] та дифузією [5].

Розглядаємо пружне n -компонентне теплопровідне тіло, яке займає в кожний момент часу область (V) евклідового простору. Тіло знаходиться під дією силового навантаження за умов тепло- і масообміну з навколишнім середовищем. Основними процесами, що відбуваються в ньому, вважаємо деформування, теплопровідність, рекристалізацію та дифузію. Приймаємо гіпотезу про локальну термодинамічну рівновагу в межах фізично малого елемента тіла та вводимо відповідні локальні параметри термодинамічного стану: тензор деформацій \hat{e} і тензор напружень $\hat{\sigma}$; абсолютну температуру T і питому ентропію S ; ступінь повноти рекристалізації Ξ і питому спорідненість A ; концентрацію i -го розчиненого компонента $C_i = \rho_i/\rho$ і хімічний потенціал M_i . Тут $i = \overline{1, n}$, густина $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i$.

За функцію локального термодинамічного стану приймаємо вільну енергію $F = F(T, \hat{e}, \Xi, C_i)$. Тоді узагальнене рівняння Гіббса для областей тіла, в яких відбувається рекристалізація, матиме вигляд

$$dF = -SdT + \sigma_{kl} de_{kl}/\rho + Ad\Xi + \sum_{i=1}^{n-1} M_i dC_i. \quad (1)$$

Тут $k, l = \overline{1, 3}$ – індекси сумування.

Розклавши вільну енергію F у степеневий ряд в околі вибраного початкового стану, обмежившись квадратичними членами розкладу і скориставшись (1), одержуємо систему рівнянь стану моделі:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + (c_t/T_0)t + (K\alpha/\rho)e + K_{t\xi}\xi + \sum_{i=1}^{n-1} d_i c_i, \\ \sigma_{kl} &= (\sigma_{kl})_0 + K \left(e - \alpha_t t + \beta\xi + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_c^i c_i - \eta\phi \right) \delta_{kl} + 2G(e_{kl} - e\delta_{kl}/3), \\ A &= A_0 + K_\xi\xi - K_{t\xi}t - (K\beta/\rho)e + \sum_{i=1}^{n-1} K_{c\xi}^i c_i, \\ M_i &= M_{i0} + \sum_{j=1}^{n-1} d_{ij}c_j - d_i t + \left(K\alpha_c^i/\rho \right) e + K_{c\xi}^i \xi, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $e = e_{kk}$, $t = T - T_0$, $\xi = \Xi - \Xi_0$, $c_i = C_i - C_{i0}$.

1. Асташкин В. И., Бурак Я. И., Онышко А. Е. Термодинамическое описание неравновесных процессов в деформируемых телах в области структурных превращений // Термодинамика необратимых процессов. – Москва: Наука, 1987. – С. 177 – 185.
2. Горелик С. С. Рекристаллизация металлов и сплавов. – Москва: Металлургия, 1982. – 352 с.
3. Иевлев В. М., Трусов Л. И., Холмянский В. А. Структурные превращения в тонких плёнках. – Москва: Металлургия, 1982. – 248 с.

4. *Онышко А. Е.* О количественном описании деформирования многокомпонентных твёрдых тел в условиях тепло- и массообмена и рекристаллизации // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1990. – **31**. – С 37 – 41.
5. *Подстригач Я. С., Павлина В. С.* Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в n -компонентном твёрдом растворе // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1965. – № 4. – С. 383 – 389.

**ON MATHEMATICAL MODELLING
OF THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF MULTICOMPONENT SOLIDS
UNDER THE HEAT AND MASS TRANSFER AND RECRYSTALLIZATION**

A model for quantitative description of thermomechanical processes in multicomponent solids in conditions of heat and mass transfer and recrystallization is proposed. As a state function the Helmholtz free energy is chosen, the constitutive equations are written.

УДК 539.3

**ВАРІАНТ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ КІЛЬКІСНОГО ОПИСУ
ЗАЛИШКОВИХ СТРУКТУРНОГО ТА НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ
СТАЛЕВИХ ПЛАСТИН ЗА НАГРІВУ РУХОМИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА**

**Томаш Волчанський¹, Олександр Гачкевич^{1,2}, Тереза Козакевич²,
Ігор Чупик², Адріан Торський³**

¹ Політехніка Опольська, Польща

² Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

³ Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

dept13@iapmm.lviv.ua

При виготовленні, термообробці та інших технологічних операціях конструкційні матеріали, зокрема сталі, зазнають твердофазних поліморфних перетворень, які істотно впливають на кінцеві фізичні та механічні властивості виробів. При цьому формується просторовий неоднорідно розподілений фазовий склад і обумовлені ним залишкові структурні напруження. У багатьох випадках внаслідок неоднорідності умов формування нерівноважного фазового складу (як наслідок неоднорідної густини матеріалу, що фіксується у тілі) неможливе проведення спеціальних експериментів. Тому актуальною і важливою є проблема кількісного розрахунку та оптимізації за певними критеріями фазового складу сталевих тіл і параметрів термомеханічного впливу, визначення і оптимізації залишкових структурних напружень.

У роботах [1, 2] запропоновано варіант математичної моделі кількісного опису фазового складу і структурних залишкових напружень у виробках з низьколегованих сталей при монотонних режимах охолодження після нагріву рухомими високотемпературними нормально розподіленими джерелами тепла до стану повної аустенізації в певних підобластях пластини. Такий підхід дозволяє врахувати неоднорідний перед охолодженням розподіл температури в тілі та надає можливість скористатися різними відомими статистичними моделями, що описують розпад аустеніту. Замість побудови складного кінетичного рівняння такого розпаду при цьому використовують лише параметр – тривалість охолодження кожної точки тіла від 850^0 C до 500^0 C за врахування хімічного складу сталі.

У рамках згаданої моделі, що базується на даних статистичного опису фазового складу тіл із низьколегованих сталей, задача кількісної його оцінки, оптимізації та розрахунку напружень розв'язується у три етапи.

На першому – формується і розв'язується, початково – крайова задача теплопровідності про нагрів тонких пластин із низьколегованої маловуглецевої сталі рухомим нормально розподіленим джерелом тепла з декількома центрами локалізації.

Далі, на основі отриманого розв'язку задачі теплопровідності та аналітичних співвідношень статистичного аналізу процесу розпаду аустеніту, визначається залишковий фазовий склад тіла. Ідентифікація нерівноважного фазового складу здійснюється на основі визначення тривалості перебування матеріалу в діапазоні температур поліморф-них перетворень. При цьому прийнято припущення про те, що виникаючі при охолодженні напруження не змінюють фазового складу матеріалу. Вважаємо також, що процеси які відбуваються у вибраному фізично малому елементі об'єму відбуваються незалежно від стану інших елементів (не впливають на процеси у суміжних елементах – аналог відомої гіпотези про локальну рівновагу).

На останньому етапі з використанням гіпотези про адитивний вклад фазових складових у відносну зміну об'єму тіла, обчислюються залишкові напруження в пластині (після охолодження в сталевому тілі фіксується просторово – неоднорідний розподіл фаз, який викликає появу залишкових структурних напружень, обумовлених відмінністю густини фаз, що утворюються в складі матеріалу). Визначені структурні напруження є залишковими в розумінні, що вони існують у тілі без зовнішніх термомеханічних навантажень і практично не змінюються упродовж експлуатації сталювого виробу. Як приклад, вивчено залишкові напруження в пластині за нагріву основним та двома додатковими джерелами.

Запропонований варіант математичної моделі може бути використаний при дослідженні рівня деформацій і напружень в елементах конструкцій, які піддаються температурному навантаженню в конкретних технологіях.

1. Гачкевич О., Козакевич Т., Гаєк М. Варіант числової методики визначення зумовленого структурними перетвореннями залишкового напруженого стану сталевих пластин за нагріву рухомими розподіленими джерелами тепла // Вісник Донецького нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2013, № 2. – С. 37-43.
2. Гачкевич О., Козакевич Т., Гаєк М. Залишкові фазовий і напружений стани сталевій пластини зумовлені рухомим розподіленим джерелом тепла і стаціонарним локальним температурним полем // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка «Фізико-математичні науки». – Вип. 5, 2015. – С. 55-58.

VARIANT OF MATHEMATICAL MODEL OF QUANTITATIVE DESCRIPTION OF RESIDUAL STRUCTURAL AND STRESS STATES OF STEEL PLATES SUBJECTED TO HEATING BY MOVING HEAT SOURCE

Variant of the mathematical model of quantitative description of phase composition and residual stress state of low-alloyed low-carbon steel thin plates subjected to heating by moving normally distributed high-temperature heat source is proposed.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ОПИСУ ТЕПЛОВИХ І МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ НЕФЕРОМАГНІТНИХ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ ПРИ ДІЇ КВАЗІУСТАЛЕНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗА ПІДМАГНІЧУВАННЯ ПОСТІЙНИМИ ПОЛЯМИ, ПАРАЛЕЛЬНИМИ ВИХІДНОМУ

**Любов Гаєвська¹, Роман Івасько¹, Стефан Моринь²,
Михайло Солодяк¹, Аніда Станік-Беслер²**

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України;

² Політехніка Опольська, Польща

dept13@iapmm.lviv.ua; a.stanik-besler@po.opole.pl

У багатьох сучасних технологіях використовується термообробка виробів з використанням змінних за часом електромагнітних полів (ЕМП). У таких виробках індуються електричні струми, які приводять до виникнення тепловиділень та пондеромоторних сил. Згадані фактори спричиняють температурні поля та напруження, які можуть досягати значних величин і перевищувати допустимі. Для побудови раціональних режимів обробки необхідні ефективні розрахункові моделі визначення ЕМП, тепловиділень, температури та механічних напружень за наявних умов. В літературі відомі окремі дослід-

ження з визначення механічної поведінки електропровідних неферомагнітних і феромагнітних (магнітно'яких і магнітотвердих) тіл за дії усталених і квазіусталених ЕМП [2]. Проте часто дія таких полів відбувається за наявності стороннього (природного чи створюваного технічними засобами) постійного магнітного поля (т. зв. підмагнічування [1]). Тому має практичне значення дослідження термомеханічної поведінки електропровідних тіл за наявності одночасної дії двох типів магнітних полів – квазіусталеного та незалежного від часу.

Визначено та досліджено параметри, що описують термомеханічну поведінку електропровідного неферомагнітного шару за дії зовнішнього ЕМП, заданого значенням дотичного квазіусталеного складника вектора напруженості магнітного поля на обох поверхнях за підмагнічування постійним магнітним полем, паралельним наявному квазіусталеному.

Використано відому розрахункову схему задачі магнітотермомеханіки, при якій розв'язок будується за три етапи [2]. На першому етапі з рівнянь електродинаміки визначають магнітне поле в квазіусталеному наближенні. Після цього записують відповідні вирази для густин тепловиділень і пондеромоторних сил. На другому етапі з відповідного рівняння теплопровідності (в якому джерелами тепла є тепловиділення, окреслені на першому етапі) знаходять температурне поле. На третьому етапі на основі співвідношень динамічної термопружності за відомих виразів для температури і пондеромоторних сил визначають переміщення і напруження.

Для розв'язання задачі електродинаміки використано метод спектральних розкладів, а відповідних задач механіки – кубічну апроксимацію шуканих величин за товщинною координатою.

Числові дослідження проведено для шару, виготовленого з різних неферомагнітних металевих матеріалів за наявності дії монохроматичного складника $H_1 \sin \omega t$ і незалежного від часу рівного H_0 .

Верхня основа $z = 0$ шару вільна від стороннього силового навантаження, а при $z = 1$ переміщення u_z рівні нулю (механічні умови, при яких задача динамічної термопружності є одновимірною).

Проведений аналіз термонапруженого стану розглядуваного електропровідного неферомагнітного шару за наявності окресленого підмагнічування показав, що як і у випадку без підмагнічування рівні температурних полів і напружень значно зростають при наближенні частоти зовнішнього ЕМП до наявних (резонансних) значень. Це зростання зумовлене квазіусталеними складовими пондеромоторних сил і джоулевого тепла, коли їх частота 2ω наближається до однієї з власних частот пружних коливань тіла ω_* . Зокрема, для шару при розглядуваних умовах закріплення отримуємо спектр [2]

$$\omega_n = \frac{1}{2} \omega_{*n} \equiv \frac{\pi(1+2n)C_1}{4h}$$

(C_1 – швидкість поздовжньої пружної хвилі, h – товщина). Підмагнічування приводить до наявності (зумовленого умовою $\omega \rightarrow \omega_*$) додаткового спектру резонансних частот ЕМП

$$\omega_{n,g} \equiv \omega_{*n} \equiv \frac{\pi(1+2n)C_1}{2h},$$

зумовленого пондеромоторною силою. При цьому значення як квазістатичних, так і квазіусталених складників напружень залежать від величини H_0 .

1. *Гачкевич А., Івасько Р., Солодяк М., Станик-Беслер А., Тарлаковський Д.* Модели описания электромагнитного поля в ферромагнитной среде при наличии подмагничивания // In: Manufacturing processes. Actual problems – 2013. – Vol. II. Modeling and optimization of manufacturing processes. – Studia i monografie. – Z. 365 / Pod red. nauk.: *M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler.* – Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2013. – Гл. 2. – С. 35-44.
2. *Gaczkiewicz A., Kasperski Z.* Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. – Opole: OWPO, 1999. – 368 s.

**MATHEMATICAL PROBLEMS OF DESCRIPTION OF THERMAL
AND MECHANICAL PROPERTIES OF NON-FERROMAGNETIC ELECTROCONDUCTIVE
SOLIDS SUBJECTED TO QUASI-STEADY ELECTROMAGNETIC FIELD
WITH MAGNETIZATION BY CONSTANT FIELDS PARALLEL TO THE ORIGINAL**

Parameters describing the thermomechanical properties of electroconductive non-ferromagnetic layer subjected to external electromagnetic field determined by tangent quasi-steady component of intensity magnetic field vector on both surfaces with magnetization by constant magnetic field parallel to the quasi-steady, are determined and analyzed.

УДК 539.3

**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ
ТЕРМОМЕХАНІКИ ЧАСТКОВО ПРОЗОРИХ ТІЛ
ЗА ТЕПЛООВОГО ОПРОМІНЕННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ
ВІДБИВАЮЧИХ ПОВЕРХОНЬ**

**Олександр Гачкевич^{1,2}, Орест Гуменчук¹,
Анджей Маринович², Адріан Торський³**

¹ *Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

² *Політехніка Опольська, Польща*

³ *Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*

dept13@iapmm.lviv.ua

У сучасних приладах та пристроях в якості різноманітних конструкційних та функціональних елементів широко використовують елементи з частково прозорих матеріалів. Часто такі елементи за технологічної термообробки чи при експлуатації зазнають інтенсивного теплового опромінення, поглинання енергії якого спричинює протікання в них взаємозв'язаних теплових і механічних процесів. Як правило, при моделюванні теплообміну випромінюванням у конкретних системах використовують незалежні від спектра усереднені інтегральні радіаційні характеристики матеріалів (замість спектральних), оскільки це суттєво спрощує опис та розрахунки параметрів наявних процесів. Відомо ряд праць, зокрема [1, 2], присвячених опису термомеханічних процесів у частково прозорих тілах за умов дії теплового випромінювання, в яких, як правило, нехтується енергією перевідбитого від навколишніх поверхонь випромінювання (хоча вони можуть суттєво перенаправляти потоки випромінювання в реальних механічних системах).

З огляду на це актуальним і важливим є моделювання процесів теплообміну випромінюванням, нагрівання та термопружного деформування частково прозорих тіл при сторонньому опроміненні за наявності відбиваючих променевої енергії поверхонь (як охолоджуваних, так і неохолоджуваних).

У роботі на основі феноменологічної теорії випромінювання в наближенні невипромінюючого матеріалу та співвідношень квазістатичної термопружності запропоновано варіант математичної моделі, що описує зумовлені тепловим опроміненням зв'язані процеси теплообміну випромінюванням, теплопровідності та деформації в частково прозорих тілах за врахування радіаційних властивостей матеріалів спектральними характеристиками, наявності відбивачів енергії випромінювання та їх нагріву.

Розглядаємо частково прозоре пружне ізотропне тіло, яке опромінюється зовнішнім тепловим випромінювання. Вплив останнього на процеси теплопровідності та деформації враховуємо через тепловиділення внаслідок поглинання матеріалом променевої енергії. Джерела випромінювання в загальному випадку моделюємо нагрітими ізотермічними кусково-гладкими поверхнями випромінювачів та поверхнями неохолоджуваних відбивачів.

Зовнішнє середовище вважаємо прозорим для випромінювання, а теплофізичні та механічні характеристики матеріалів приймаємо постійними та рівними середнім значенням на проміжку нагрівання. Приймаємо, що максимальна температура нагріву тіла значно менша за температуру випромінювачів і не перевищує температури трансформації матеріалу частково прозорого тіла.

При окреслених допущеннях за вихідні співвідношення, що описують тепловиділення, температуру та параметри механічних полів у частково прозорому тілі, приймаємо наступні:

- співвідношення феноменологічної теорії випромінювання, сформульовані в наближенні невипромінюючого та нерозсіюючого частково прозорого матеріалу, в основі якої лежать закони Планка та Бугера;
- рівняння нестационарної теплопровідності в частково прозорому тілі за відповідних початково-крайових умов, в яких враховано тепловиділення (внаслідок поглинання частково прозорим тілом енергії випромінювання та зумовленого його радіаційним теплообміном з непрозорим неохолоджуваним відбивачем). За врахування нагріву відбивача співвідношення теорії випромінювання в системі «випромінювач-відбивач-тіло» та теплопровідності у неохолоджуваному відбивачі є взаємозв'язаними;
- співвідношення квазістатичної термопружності. На основі аналізу відомих із літератури даних пондеромоторними силами дії випромінювання на тіло за розглядуваних його характеристик нехтуємо.

Як приклад розглянуто систему з плоскопаралельних шарів.

Запропонована математична модель може бути використана для дослідження термомеханічних процесів у частково прозорих тілах за стороннього теплового опромінення з урахуванням спектрального і просторового перерозподілів енергії випромінювання внаслідок додаткового випромінювання неохолоджуваними відбивачами променевої енергії при їх нагріванні.

1. *Гачкевич А. Р.* Термоупругость электропроводных тел, находящихся под воздействием электромагнитного излучения инфракрасного диапазона частот. – Львов, 1993. – 56 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача; № 10-93).
2. *Терлецький Р. Ф., Турій О. П.* Термонапружений стан частково прозорої шаруватої пластини при тепловому опроміненні // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2006. – 49, № 3. – С. 177-187.

THE PHYSICO-MATHEMATICAL MODEL OF THERMOMECHANICS
OF SEMITRANSSPARENT BODIES SUBJECTED TO THERMAL RADIATION
IN THE PRESENCE OF REFLECTIVE SURFACES

A physico-mathematical model of radiative thermomechanics for semitransparent solids is proposed. An irradiated solid is equipped with radiation reflectors, the latter being both cooling and non-cooling. Spectral characteristics of real radiation sources as well as irradiated solids are taken into account.

УДК 539.3

**ФІЗИКО- МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ КІЛЬКІСНОГО
ОПISУ ТЕПЛОВИХ І МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ
НЕФЕРОМАГНІТНИХ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ
ЗА ДІЇ ІМПУЛЬСНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ
З МОДУЛЯЦІЄЮ АМПЛІТУДИ**

**Олександр Гачкевич¹, Карен Казарян²,
Роман Мусій³, Дмитро Тарлаковський⁴**

¹ *Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

² *Інститут механіки АН Республіки Вірменії*

³ *Національний університет «Львівська політехніка»*

⁴ *Інститут механіки Московського держуніверситету ім. М. В. Ломоносова*

dept13@iapmm.lviv.ua, musiy@lp.edu.ua

Розглядаємо електропровідні неферромагнітні тіла, матеріали яких однорідні, ізотропні, а фізико-механічні характеристики – постійні. Тіла зазнають дії імпульсних електромагнітних полів (ІЕМП) з модуляцією амплітуди, які використовують в сучасних технологіях імпульсної електромагнітної обробки електропровідних елементів багатьох приладів і пристроїв [1]. Поверхні тіл вільні від силового навантаження і перебувають в умовах конвективного теплообміну з довкіллям. Вплив ІЕМП на електропровідне тіло враховуємо через джоулеве тепло $Q = 1/\sigma(\text{rot } \mathbf{H})^2$ (яке виникає за рахунок протікання індукованих у тілі струмів провідності) і пондеромоторних сил $\mathbf{F} = \mu \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}$ взаємодії цих струмів і діючим зовнішнім ІЕМП, яке окреслене значеннями дотичних до поверхні тіла компонент вектора напруженості магнітного поля \mathbf{H} . Тут σ, μ – коефіцієнт електропровідності і магнітна проникність. Ці два фізичних фактори Q і \mathbf{F} викликають в електропровідному тілі нестационарні температуру T і напруження, які

описуються компонентами σ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) тензора напружень $\hat{\sigma}$. При відповідних значеннях параметрів, які характеризують ІЕМП, максимальні величини температури і компонент тензора напружень, а також інтенсивності напружень σ_i можуть набувати значень, за яких розглядуване тіло втрачає несучу здатність як елемент конструкції чи відповідного виробу. Оцінка несучої здатності електропровідного елемента конструкції [2] здійснюється на основі критерію Губера-Мізеса

$$\max \sigma_i < \sigma_d . \quad (1)$$

Тут σ_d – межа пружної деформації матеріалу тіла.

Розрахункова схема кількісного опису теплових і механічних властивостей неферромагнітних електропровідних тіл за дії ІЕМП з модуляцією амплітуди зводиться до трьох етапів:

– на першому етапі зі співвідношень електродинаміки Максвелла за нехтування струмами зміщення і рухомістю електропровідного середовища визначають джоулеве тепло і пондеромоторні сили;

– на другому етапі з рівнянь динамічної задачі термопружності, в яких внутрішніми джерелами тепла в електропровідному тілі є джоулеві тепловиділення, а об'ємними силами – пондеромоторні сили, знаходять температуру і компоненти тензора напружень, а також інтенсивності напружень;

– на третьому етапі з виконання нерівності (1) розраховують граничні значення параметрів ІЕМП, за яких електропровідне тіло втрачає несучу здатність як конструкційний елемент.

На основі запропонованої методики досліджено теплові і механічні властивості неферромагнітних електропровідних пластин за дії ІЕМП з модуляцією амплітуди характерних типів [2, 3].

1. Батыгин Ю. В., Лавинский В. И., Хименко Л. Т. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Харьков: МОСТ-Торнадо, 2003. – 288 с.
2. Гачкевич О. Р., Мусій Р. С., Тарлаковський Д. В. Термомеханіка неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів: СПОЛОМ 2011. – 216 с.
3. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми. – Львів: Растр – 7, 2010.

**PHYSICO-MATHEMATICAL BASIS OF A NUMERICAL DESCRIPTION
OF THERMAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF NON-MEMORY ELECTRIC
CONTROLLING TESTS AFTER IMPULSE ELECTROMAGNETIC FIELDS
WITH MODULATION OF AMPLITUDE**

A mathematical model for quantitative description of thermal and mechanical properties of non-ferromagnetic conductive bodies is proposed for the action of pulsed electromagnetic fields with amplitude modulation

УДК 539.3

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ
ВИГОТОВЛЕННЯ МОДУЛЬНИХ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ
ЗІ СКЛА СПОСОБОМ СИТАЛОЦЕМЕНТНОГО З'ЄДНАННЯ****Микола Гачкевич¹, Анна Козярська²,
Анна Равска-Скотнічни², Борис Чорний³***¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,**² Політехніка Опольська, Польща**³ Львівський філіал Дніпровського національного університету
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна*

dept13@iapmm.lviv.ua

У сучасній інженерній практиці при створенні модульних оболонкових конструкцій, що працюють в агресивних середовищах за наявності зовнішнього тиску, в якості складових елементів широко використовують напівсферичні і циліндричні оболонки з неметалічних матеріалів (скла, ситала, кераміки і т. п.). Технологія виготовлення конструкцій з таких оболонок складається з етапів: формування в умовах скляного виробництва скляних напівсферичних і циліндричних оболонкових елементів, механічна обробка їх торців та з'єднання в той чи інший спосіб двох і більше частин між собою. На практиці, як правило, для з'єднання елементів з розглянутих матеріалів здебільшого використовують клейові з'єднання. Такі сполучення мають низьку надійність через втрату адгезійних властивостей з'єднання при експлуатації в агресивних середовищах. Щоб зменшити негативний вплив зовнішнього середовища на клейові шви, їх ізолюють шляхом нанесення додаткового покриття. При цьому виникає проблема забезпечення герметичності шва, що є істотним недоліком клейових з'єднань. У роботі запропоновано математичну модель і методика розрахунку оптимальних теплових режимів, що забезпечують створення відомого надійного і стійкого при експлуатації в агресивних середовищах ситалоцементного з'єднання оболонкових елементів із крихких матеріалів.

Опрацьовано варіант методики побудови оптимальних теплових режимів при ситалоцементному з'єднанні скляних оболонкових елементів (виготовлених як з одного, так і з різних типів скла). При цьому запропоновано модель процесу з'єднання, який полягає в нанесенні на з'єднувані торці складових елементів шару суспензії ситалоцементу, подальшого нагріву до темпе-

ратури 450–460°С за забезпечення термоміцності отриманої системи і витримки (для кристалізації ситалоцементу до твердого стану).

Встановлено, що в процесі з'єднання максимальні напруження виникають в околі перетинів з'єднання кристалізованого шару ситалоцементу зі скляними елементами. Нагрівання є оптимальним, якщо максимально можливі величини напружень в кожен момент часу будуть мінімальними.

В якості вихідної модельної системи вибрано кусково-однорідну циліндричну оболонку, що складається з трьох частин (середня моделює ситалоцементний твердий шов – область, в якій виникають найбільші значення напруження при нагріванні-охолодженні). При побудові оптимального режиму в методиці оптимізації реалізовані умови: необхідності здійснення конвективним способом нагріву (за рахунок змінної в часі температури навколишнього середовища) зовнішньої поверхні оболонки від постійної початкової температури до заданої максимальної за певний час; витримання цієї температури деякий проміжок часу (відомий час тривалості формування з'єднання шляхом кристалізації ситалоцементу); охолодження поверхні до природної температури (за конкретний проміжок часу) за певних обмежень, які характеризують температурне поле і напружено-деформований стан.

При оптимізації важливим є вибір критерію оптимальності. Для однорідних скляних оболонок, як правило, вибирають відповідний функціонал, який в інтегральному сенсі відображає мету оптимізації. Максимальні нормальні напруження (при досягненні яких згідно першої теорії міцності руйнується скло) виникають у приконтатній області спряження різнорідних частин кусково-однорідної оболонки. Тому, за специфіки розглядуваної задачі оптимізації, доцільно використати локальний критерій оптимальності, що характеризує міру напруженого стану в кожен момент часу. За такий вибрано функціонал максимальних нормальних напружень.

При цьому задача оптимізації розв'язана за використання числових методів. Для реалізації етапу пошуку умовного мінімуму вказаного вище функціоналу при розв'язуванні задач оптимізації вибрано метод локальних варіацій (поетапної параметричної оптимізації) при відомому розв'язку прямої задачі. При постановці прямих задач термомеханіки прийнято квазістатичну теорію термодружності тонких термочутливих скляних оболонок при кубічній апроксимації відносно товщинної координати температури і теплової деформації враховано залежність коефіцієнта лінійного теплового розширення від температури. Розглянуто режим практично однорідного відносно повздовжних координат конвективного нагріву кусково-однорідних оболонок зі сторони зовнішньої поверхні, який широко використовують в технологіях термообробки. Побудовано оптимальний режим. Проаналізовано особливості отриманого при цьому теплового і напруженого стану в околі січень з'єднання складових частин оболонок, виготовлених із конкретних типів скла, що застосовуються у виробництві.

Методика оптимізації узагальнена на випадок режимів ситалоцементного з'єднання елементів за врахуванні термочутливості допустимих напружень.

**MODELING AND OPTIMIZATION OF THERMAL REGIMES
OF PRODUCTION OF GLASS MODULAR SHELL CONSTRUCTIONS
BY SITAL-CEMENT CONNECTION METHOD**

A method of calculation of optimal thermal regimes of sital-cement connection of shell constructions from glass is suggested.

УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ
ДОСЛІДЖЕННЯ ЗУМОВЛЕНОЇ ТЕПЛОВИМ ОПРОМІНЕННЯМ
МЕХАНОТЕРМОДИФУЗІЇ В ЧАСТКОВО ПРОЗОРИХ
ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛАХ
З ГАЗОВИМИ ДОМІШКАМИ**

**Олександр Гачкевич¹, Аніда Станік-Беслер²,
Роман Терлецький¹, Адріан Торський³**

¹ *Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

² *Політехніка Опольська, Польща*

⁴ *Центр математичного моделювання Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*

dept13@iapmm.lviv.ua

Останнім часом все інтенсивніше розвиваються дослідження електромагнітних, теплових, механічних процесів у взаємозв'язку з переносом маси в деформівних твердих тілах. Це викликано потребами електронної техніки, пов'язаними зі створенням нових електротехнічних матеріалів (діелектричних, електропровідних, напівпровідникових), а також прогнозуванням електричних, магнітних, теплових і механічних властивостей матеріалів, що містять чужорідні домішки, і їх термомеханічної поведінки при комплексних навантаженнях (механічних, теплових, дифузійних і електромагнітних). Відповідні моделі механотермодифузії згаданих типів тіл будували на основі термомеханіки сумішей [4, 6] чи теорій деформівних твердих розчинів [1, 5] з використанням відомих теорій електромеханічної взаємодії [9]. Що стосується впливу електромагнітних процесів, то враховувались дії лише в радіочастотному діапазоні довжин хвиль.

У літературі в окремих дослідженнях масопереносу домішок у тілах як непрозорих, так і в частково прозорих для випромінювання світлового діапазону (до якого належить теплове випромінювання), виходили з класичних співвідношень термодифузії, в яких вплив випромінювання враховували через знайдені з розв'язку задачі переносу тепла та випромінювання в тілі (радіаційно-кондуктивного теплообміну) розподіли температур. При цьому вплив концентрацій домішок на поле випромінювання в тілі та специфіка поглинання випромінювання окремими компонентами не розглядали.

На основі континуальної моделі твердої суміші (твердого розчину), зокрема з домінантною компонентою, і феноменологічної теорії випромінювання, запропоновано математичну модель кількісного опису зумовлених дією зовнішнього теплового випромінювання механотермодифузійних процесів у частково-прозорих деформівних твердих тілах із домішками. Тіло розглядають як гомогенну тверду суміш деформівної матриці (каркаса) і дифундуючих в ньому домішкових компонент (дифузантив). Вплив випромінювання на досліджувані в тілі процеси враховується через тепловиділення внаслідок поглинання енергії випромінювання компонентами тіла (каркасом і домішками) і пондеромоторні сили дії випромінювання на них, які розглядаються в континуальній моделі як об'ємні джерела тепла та об'ємні сили. При моделюванні термомеханічної поведінки таких тіл, спричиненої дією світлового випромінювання, важливим є врахування (при об'ємному характері поширення енергії випромінювання в тіла) відмінності поглинальних властивостей складових компонент (зокрема, газових домішок), а також специфіки опису поширення випромінювання в них. Внаслідок такої відмінності і чинників дії випромінювання на компоненти (густин поглинутих енергій та масових сил) в деяких підобластях тіла (в локальних об'ємах з фізично малих макрочастин) відбуваються нерівноважні процеси обміну енергією між каркасом і домішками при встановленні теплової рівноваги, які моделюються фотонно-фононною взаємодією [2, 3, 7, 8].

1. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Чапля Е. Я. Деформация электропроводных тел с учетом гетеродиффузии заряженных примесных частиц // Физ.-хим. механика материалов. – 1980. – №5. – С. 8-14.
2. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Курницький Т. Л. Математичне моделювання механотермодифузійних процесів у частково-прозорих деформівних твердих тілах з газовими домішками за умов дії електромагнітного випромінювання світлового діапазону частот // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 1. – С. 151-164.
3. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 2: Механотермодифузія в частково прозорих тілах / О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, Т. Л. Курницький. – Львів: СПОЛЮМ, 2007. – 184с.
4. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
5. Подстригач Я. С., Павлина В. С. Диффузионные уравнения термодинамических

- процессов в -компонентном твердом растворе // Физ.-хим. механика материалов. – 1965. – №4. – С. 383-389.
6. Bowen R. M. Theory of mixtures // Continuum physics III / Ed. by A.C. Eringen. – New York: Academic Press, 1976. – 127p.
 7. Gachkevich A., Kournyts'kyi T., Matysiak S. Effect of laser radiation upon heat and mass transfer in two-component elastic semitransparent layer // Int. J of Heat and Mass Transfer. – 2004. – 47, № 5. – P. 977-985.
 8. Gachkevich A., Kournyts'kyi T., Terlets'kii R. Investigation of molecular gas admixture diffusion, heat transfer and stress state in amorphous solid subjected to thermal infrared radiation // Int. J. Eng. Sci. – 2002. – 40, № 8. – P. 829-857.
 9. Hutter K. and van de Ven A. A. Field-matter interaction in thermoelastic solids. – Lecture Notes in Physics. – 88. – Berlin: Springer-Verlag, 1978. – 234p.

**MATHEMATICAL MODELS AND METHODS OF INVESTIGATION
THE MECHANOTHERMODIFFUSION IN SEMITRANSSPARENT SOLIDS
WITH GAS ADMIXTURE COUSED BY THERMAL RADIATION**

A mathematical model to describe mechanical, thermal and diffusive processes in semitransparent solids with gas admixture subjected to thermal radiation is developed.

УДК 539.3

**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ
ТІЛ ОБЕРТАННЯ З ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-
ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ У ПРОЦЕСІ ЇХ ЦІЛЬОВОЇ
ТЕРМООБРОБКИ**

**Євген Ірза¹, Анна Козьярська², Віктор Міщенко¹,
Валентин Можаровський³**

¹ *Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

² *Політехніка Опольська, Польща*

³ *Гомельський державний університет ім. Ф. Скорини, Республіка Білорусь*

dept13@iapmm.lviv.ua

В останні роки пройшли великі зміни в нанотехнологіях, внаслідок чого отримати матеріали, фізико-механічні характеристики яких змінюються неперервно в деякому напрямку. Такі матеріали отримали назву функціонально-градієнтних матеріалів або скорочено ФГМ.

Конструкції з термов'язкопружних ФГМ часто піддаються певним тепловим процесам, які пов'язані з їх нагрівом і подальшим охолодженням.

У результаті дії температурних полів у них виникають температурні напруження, які можуть перевищувати допустимі значення і призводити до руйнування конструкцій або погіршувати їх експлуатаційні властивості.

Тому виникає практична потреба у розроблянні ефективних математичних методик дослідження термонапруженого стану тіл, що перебувають під дією теплових навантажень.

З огляду літератури по дослідженню термомеханічної поведінки ФГМ [1] можна зробити висновок, що згадана проблема недостатньо опрацьована. В окремих працях термомеханічні властивості ФГМ описуються ступінчатою функцією, а в інших – моделюються степеневою або експоненціальною функціями, що накладає певні обмеження на характер зміни термомеханічних властивостей. Як правило, в цих випадках при отриманні розв'язку застосовують аналітичні методи.

Запропоновано числову математичну модель термомеханіки для дослідження зумовлених тепловим навантаженням температурного і термонапруженого станів у тілах обертання довільної форми, виготовлених із термов'язкопружних ФГМ, за врахування релаксації залишкових напружень при підвищених температурах. При цьому характер градієнтності описується координатною залежністю характеристик матеріалу.

При побудові математичної моделі використано відому модель Максвелла для опису в'язкопружної поведінки матеріалу в широкому діапазоні температур (за максимальних температур, нижчих від температур структурних перетворень в матеріалі). Приймаємо, що при розглядуваних теплових навантаженнях напружений стан тіла не впливає на його температуру, тобто задачу про визначення напружено-деформованого стану в тілі формуємо в квазістатичній постановці (в переміщеннях) [2]. При розв'язуванні нелінійної системи ключових диференціальних рівнянь за наявних початкових та крайових умов використано метод зважених залишків у поєднанні з методом скінченних елементів [3].

У прийнятому підході алгоритм розв'язання сформульованих задач (методом зважених залишків в поєднанні з методом кінцевих елементів) включає:

- дискретизацію кінцевими елементами області визначення функцій;
- апроксимацію термомеханічних характеристик ФГМ на елементі розбиття;
- апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття;
- отримання на цій основі системи алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих функцій у вузлах і визначення алгоритму розв'язку цієї системи.

Як приклад визначено та досліджено термонапружений стан у порожньому циліндрі, виготовленому з функціонально-градієнтного за товщиною

матеріалу. Циліндр перебуває під дією температурного навантаження. Проведено числовий аналіз отриманих розв'язків.

Запропонований алгоритм розв'язування сформульованого класу задач може бути використаний на виробництві при дослідженні рівня деформацій і напружень в елементах конструкцій, які піддаються температурному та силовому навантаженню.

1. Айзикович С. М., Александров В. М., Васильев А. С., Кренев Л. И., Трубчак И. С. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. – Москва: Физматлит, 2011. – 193с.
2. Ірза Є. До методології оптимізації теплових режимів і напруженого стану в скляному виробництві // Вісник ЛНУ, Сер. мех.-мат. – 2012. – 76. – С. 156-163.
3. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. Finite Element Method: 1. The Basis. – London: “Butterworth Heinemann”, 2000. – 689р.

**PHYSICO-MATHEMATICAL MODEL OF MECHANICAL BEHAVIOR
OF CIRCULAR SOLIDS OF THERMOVISCOELASTIC FUNCTIONAL-GRADIENT
MATERIALS SUBJECTED TO HEAT TREATMENT**

A numerical mathematical model of thermomechanics for analyses of temperature and thermo-stressed states of circular solids made of thermoviscoelastic functional-gradient materials taking into account the relaxation of residual stresses at elevated temperatures is proposed. The gradient character is described by the coordinate dependence of material characteristics.

УДК 539.3

**РОЗВИТОК МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ
ПРУЖНОЇ ПОВЕДІНКИ НЕОДНОРІДНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ**

Роман Кушнір, Юрій Токовий

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

tokovy@iapmm.lviv.ua

Механічна поведінка неоднорідних тіл (під якими тут розуміємо тіла з матеріалів, усі або деякі характеристики яких є функціями просторових координат) перебуває у фокусі теоретичних та прикладних понад сотні років. Упродовж цього часу представниками різних наукових шкіл отримано низку вагомих результатів та накопичено багатий досвід розв'язування задач механіки неоднорідних тіл. Разом з тим, на жаль, багато важливих результатів

залишилися непоміченими широким науковим загалом. Також можна простежити у сучасних друкованих виданнях, що багато результатів, опублікованих останнім часом, у тій чи іншій мірі повторюють чи відтворюють результати, отримані раніше. У зв'язку з цим загострюється потреба систематизації накопичених знань щодо моделювання та аналізу механічної поведінки неоднорідних тіл, що на думку авторів (яка ґрунтується, зокрема, на твердженні Максвелла «It is of great advantage to the student of any subject to read the original memoirs on that subject, for science is always most completely assimilated when it is in the nascent state» [1, с. xiii–xiv]) найкраще робити з огляду на історію започаткування та розвитку основних підходів і методів. Потреба у такій систематизації також обумовлена сучасними запитами, які постають у механіці та матеріалознавстві, зокрема, через широке впровадження матеріалів з комбінованими властивостями, наприклад, функціонально-градієнтних матеріалів. У цій доповіді зроблено спробу систематичного викладу домінуючих аналітичних методів дослідження пружної поведінки неоднорідних тіл у їх історичній ретроспективі. Простежено основні тенденції розвитку аналітичних методів стосовно сучасних потреб галузі.

1. *Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism. 1.* – Oxford: Clarendon Press, 1983. – 425 p.

**ADVANCEMENT IN METHODS FOR ANALYSIS
OF ELASTIC BEHAVIOR OF INHOMOGENEOUS SOLIDS**

This paper is concerned with the advancement in the dominating methods for the analysis of elastic behavior of inhomogeneous solids with regard to the development history and basic achievements.

УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ
ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ В ОБЛАСТІ КЛИНОВИДНОГО
З'ЄДНАННЯ ДЕКІЛЬКОХ МАТЕРІАЛІВ**

Микола Махоркін

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

mahorkin@ukr.net

При дослідженні фізико-механічних полів різної фізичної природи (поля напружень та деформацій, температурні поля, електро-магнетичні поля) у неоднорідних об'єктах, що містять різного роду гострокінцеві дефекти та

злами поверхонь спряження різних матеріалів, зазвичай використовують модельні області у вигляді клиновидного з'єднання. Ними моделюють околиці тих точок де характеристики досліджуваних полів мають сингулярний характер (точки-концентратори на зразок кінців, гострокінцеві включення зламів поверхонь поділу матеріалів, точок контакту зерен в композитних матеріалах тощо) [1].

Загалом фізико-механічні поля поблизу таких точок описуються асимптотичним безмежним рядом вигляду [1, 3]

$$\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} K_i r^{-\lambda_i}, \quad (1)$$

де r – відстань від точки-концентратора; $\lambda_i = 1 + p_i$ – порядок сингулярності; K_i – коефіцієнти, загальний вигляд яких залежить від методів розв'язку сформульованої крайової задачі математичної фізики; p_i – корені характеристичного рівняння. Проблема зводиться до побудови та знаходження коренів відповідного характеристичного рівняння. Враховуючи, що характеристичні рівняння в загальному випадку трансцендентні при дослідженнях обмежуються лише сингулярною частиною ряду (для цього достатньо визначити лише ті корені рівняння, дійсна частина яких належать інтервалу $(-1; 0)$). Проте для з'ясування поведінки сингулярних фізико-механічних полів на дальшій відстані від точки-концентратора та тих полів, що не мають особливостей (наприклад поле переміщень чи стаціонарне температурне поле), необхідно визначати весь спектр коренів характеристичного рівняння. Зокрема, ця проблема постає у випадку необхідності з'ясування характеристик поля напружень в околі іншої особливої точки (наприклад поблизу кінців тріщини), що розташована на порівняно невеликій відстані від особливої точки окіл якої змодельовано багатоклиновим з'єднанням.

Для опису низки фізико-механічних полів, використовують розв'язки крайових задач, сформульованих на основі рівняння Лапласа (поле напружень та переміщень за антиплоскої деформації, стаціонарне температурне поле, електростатичне поле в області вільній від зарядів, та ін.).

Використання перетворення Мелліна разом із методикою постановки узагальненої задачі спряження [2] дало змогу записати вирази для опису відповідних полів у вигляді (1), де K_i – лишки зображення за Мелліном функції, що описує шукане поле [2]. У цьому випадку полюсами, в яких обчислюються лишки, є розв'язки відповідного характеристичного рівняння. То ж проблема з'ясування всього спектра коренів характеристичного рівняння постає особливо гостро.

Використовуючи апарат узагальнених функцій [2] записано загальний вигляд характеристичних рівнянь для довільних механічних та геометричних

параметрів багатоклинової системи у випадку кожної крайової задачі в такому вигляді:

$$p \sin p\varphi_n + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) \mu_{i+1}^{-1} R_j = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} L_1^i \cos [p(\varphi_n - \varphi_i)] \\ p^{-1} L_2^i \sin [p(\varphi_n - \varphi_i)] \end{matrix} \right\},$$

де у випадку першої крайової задачі слід обирати індекс $j = 1$, а у випадку другої – $j = 2$; коефіцієнти L_1^i та L_2^i – визначаються за відомими рекурентними співвідношеннями [1, 2]. Для змішаної крайової задачі характеристичні рівняння мають аналогічний вигляд, їх не подаємо через брак місця.

Здійснено аналіз побудованих рівнянь, в результаті чого виявлено закономірності, характерні для їх розв'язків. З'ясовано низку конфігурацій багатоклинових систем, для яких можливе аналітичне розв'язання характеристичних рівнянь. Ґрунтуючись на методиці визначення напружено-деформованого стану в багатоклинових системах за поздовжнього зсуву, запропоновано рекомендації, щодо побудови виразів, які описують фізико-механічні поля не лише в околі точок-концентраторів, а й в усій області зайнятій об'єктом модельованим багатоклиновою системою, зокрема і за наявності радіально розташованих дефектів.

1. *Carpinteri A. Paggi M.* Singular harmonic problems at a wedge vertex: mathematical analogies between elasticity, diffusion, electromagnetism, and fluid dynamics/ Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2011. – **6**. – Issue 1-4. – P. 113-125.
2. *Makhorkin M., Sulym H.* On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation/ Civil and environmental engineering reports/ – 2010. – **5** – P. 235-251.
3. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension/ Journal of Applied Mechanics. – 1952. – **19**, No. 4. – P. 526-528.

**MATHEMATICAL PROBLEMS OF THE PHYSICOMECHANICAL FIELDS
MODELING IN THE REGION OF WEDGE-TYPE CONNECTION
OF SEVERAL MATERIALS**

The mathematical problems arising in the description of physicomachanical fields in the domains that can be simulated by a multi-wedge system are considered

УДК 539.3

КІЛЬЦЕВЕ ТА КРУГОВЕ ВІДШАРУВАННЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ ВІД ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ ПІД ДІЄЮ РОЗПОДІЛЕНОГО ПО КОЛУ СТОКУ ТЕПЛА**Мар'яна Микитин***Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України**labmtd@iapmm.lviv.ua*

Досліджено локальне порушення контакту між пружним однорідним півпростором та жорсткою термоізолюваною основою під дією розподіленого на безмежності зовнішнього тиску p та розподіленого, в півпросторі на відстані d від поверхні контакту, вздовж кола радіуса R стоку тепла сталої інтенсивності ω . Задача сформульована в рамках лінійної теорії термопружності. Спочатку побудовано аналітичний розв'язок задачі термопружності для півпростору за повного контакту з основою. Аналіз даного розв'язку показав можливість двох випадків локальної втрати контакту, а саме, по кільцю або кругу. Кільцеве відшарування можливе, якщо відстань від стоків до поверхні менша за деяке критичне значення d_{cr} , де $d_{cr} \approx 1,1R$, а кругове, якщо $d > d_{cr}$.

З появою можливого відшарування задачу було переформульовано. Записано граничні умови на ділянці контакту та ділянці зазору. Для визначення напружено-деформованого стану використано метод суперпозиції. Розв'язок задачі подано у вигляді суми розв'язків задачі про повний контакт та задачі про збурення напружено-деформованого стану, зумовлене локальним відшаруванням.

Для знаходження розв'язку задачі з кільцевим відшаруванням [1] використано метод функцій міжконтактних зазорів [2] та інтегральне перетворення Ганкеля. Компоненти тензора напружень і вектора переміщень подано через висоту зазору між півпростором і основою, для визначення якої, використовуючи методику роботи [3], отримано сингулярне рівняння. Для його числового розв'язання застосовано метод колокацій.

Для задачі з круговим відшаруванням побудовано аналітичний розв'язок, використовуючи методику [4], що базується на інтегральному перетворенні Ганкеля, зведенні задачі до інтегрального рівняння Абея та застосуванні формули його обернення.

Радіуси зазору наперед невідомі. Для їх визначення використано умови плавного змикання берегів зазорів.

Для обох випадків можливого локального відшарування побудовано залежності висоти зазору та нормальних контактних напружень від радіуса зазору, проаналізовано залежність інтенсивності стоку тепла, необхідної для утворення кільцевого розшарування сталого ширини від відстані до поверхні контакту, та залежність радіуса зазору від інтенсивності стоку тепла. Проаналізовано зміну форми зазору зі зміною інтенсивності стоку для різних його відстаней від поверхні контакту. Визначено співвідношення для визначення критичного значення, за якого відшарування може бути чи кільцевим чи круговим.

1. *Микитин М. М., Середницька Х. І., Монастирський Б. Є., Мартиняк Р. М.* Кільцеве розшарування між тілами за локального охолодження коловим стоком тепла // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2017. – Вип. 26. – С. 55-62.
2. *Мартиняк Р. М.* Метод функцій міжконтактних зазорів у задачах локального порушення контакту пружних півпросторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С.102-108.
3. *Erdogan F.* Simultaneous dual integral equations with trigonometric and Bessel Kernels // ZAMM – 1968. – **48**, No. 4 – P. 217-225.
4. *Монастирський Б. Є., Микитин М. М.* Осесиметрична задача про відшарування пружного півпростору від жорсткої основи за дії точкового джерела охолодження. // Математичні методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 2. – С. 84-93.

**THE RING OR THE CIRCULAR DELAMINATION
BETWEEN HALF SPACE AND RIGID BASE UNDER THE ACTION
OF THE HEAT SINKS DISTRIBUTED ALONG A CIRCLE**

A contact problem for an elastic half-space and a rigid basis, taking into account the circular delamination under the action of heat sinks uniformly located along a circle is considered. The expressions for gap height and contact pressure are defined. The dependence of the radius of the gap on the intensity of the heat sinks is established. The numerical analysis of the change in the shape of the gap from the intensity of the heat sinks for different distances from the sinks to the half-space surface is carried out

УДК 539.3

МЕТОДИКА КІЛЬКІСНОГО ОПИСУ МЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ЧАСТКОВО ПРОЗОРОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ЗА ТЕПЛОВОГО ОПРОМІНЕННЯ

Ростислав Терлецький ¹, Орест Гуменчук ¹,
Анджей Метельські ², Александра Журавська ²

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
² Політехніка Опольська, Польща

dept13@iapmm.lviv.ua

У технологічних процесах при термообробці частково прозорих тіл широко застосовується теплове опромінення. Тепловиділення, які виникають в тілі внаслідок поглинання ним променевої енергії, спричинюють температурні поля і напруження, які в залежності від розміщення джерел випромінювання, його інтенсивності та спектрального складу, умов теплообміну тіла із зовнішнім середовищем, умов закріплення можуть змінюватись в широких межах, досягати високих рівнів і перевищувати допустимі.

Чимало праць присвячено проблемам дослідження теплообміну випромінюванням та термонапруженого стану в частково прозорих тілах. Проте, в них недостатньо вивчено вплив на термонапружений стан тіла способу врахування радіаційних властивостей матеріалів і поверхонь спектральними характеристиками (в порівнянні з інтегральними) та взаємного розміщення джерела випромінювання та тіла. Тому актуальною є розробка методики визначення параметрів термонапруженого стану тіла за стороннього теплового опромінення з урахуванням цих факторів.

Розглядається порожнистий скінченний циліндр \bar{V} довжиною L , обмежений з торців поверхнями S_L і S_R та циліндричними поверхнями радіусів R_1 і R_2 (поверхні S_{emp} та S_{out} , відповідно), де $R_1 < R_2$. Джерелом теплового випромінювання є смужка $h < z < h+l$ нагрітої циліндричної поверхні

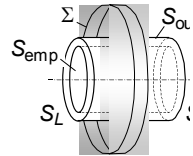


Рис.

Σ радіуса R_3 ($R_3 > R_2$), на якій підтримується постійна температура T_{rad} (рис.). Тіло знаходиться в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Поверхня циліндра вільна від силового навантаження.

Ставиться задача про визначення тепловиділень, температурного поля в циліндрі та його пружно-деформівного стану, зумовлених дією зовнішнього теплового опромінення. При цьому при розв'язуванні задачі виходимо з розрахункової схеми визначення термонапруженого стану електропровідних пружних тіл, в якій вплив електромагнітного випромінювання на процеси теплопровідності і деформації враховується через тепловиділення внаслідок поглинання матеріалом електромагнітної енергії. Нехтується зв'язаністю полів деформації і температури, а також силами інерції в рівняннях руху, тобто процес деформації приймається квазістатичним. Теплофізичні характеристики матеріалу циліндра вибираємо незалежними від температури (зокрема, рівними середнім на часовому інтервалі нагріву), а поверхні, що приймають участь в теплообміні випромінюванням, – дифузними. Максимальну температуру нагріву циліндра вважатимемо значно меншою від температури T_{rad} гріючої поверхні Σ (умова застосовності наближення не випромінюючого середовища). У такому випадку розрахункова схема задачі про знаходження термонапруженого стану циліндра зведеться до наступної:

- з задачі теорії випромінювання, в якій ключовими є рівняння переносу в наближенні не випромінюючого матеріалу та балансові співвідношення на границях розділу середовищ, визначаємо спектральні густини потоків енергії ефективного випромінювання на поверхнях;
- за значеннями спектральних густин потоків енергії ефективного випромінювання на внутрішніх сторонах поверхонь тіла визначаємо спектральну інтенсивність випромінювання в тілі та відповідні їй тепловиділення;
- ці тепловиділення використовуємо як питому потужність неперервно розподілених теплових джерел в рівнянні теплопровідності;
- при відомому температурному полі з квазістатичної задачі термопружності знаходимо параметри напружено-деформівного стану порожнистого циліндра.

Спектральні густини потоків енергії ефективного випромінювання на поверхнях тіла знаходимо із отриманої системи інтегральних рівнянь, яку розв'язуємо з допомогою методу квадратур.

Розв'язок квазістатичної задачі термопружності, сформульованої в переміщеннях, шукаємо з допомогою методу сіток, використовуючи при цьому метод матричної прогонки. За відомими компонентами вектора переміщень знаходимо з використанням закону Дюгамеля-Неймана компоненти тензора напружень.

Запропонована методика знаходження термонапруженого стану в частково прозорих тілах дозволяє врахувати спектральну залежність коефіцієнта поглинання матеріалу тіла та ступеня чорноти випромінюючої поверхні для тіл і випромінювачів довільної геометричної конфігурації.

Як приклад, розглянуто циліндр зі скла С-95.

**THE TECHNIQUE OF QUANTITATIVE DESCRIPTION
OF THE MECHANICAL BEHAVIOR OF A SEMITRANSSPARENT HOLLOW CYLINDER
SUBJECTED TO THERMAL RADIATION**

A procedure for determination of thermostressed state of semitransparent finite hollow cylinder subjected to external thermal radiation from heated coaxial to cylinder stripe is proposed

**МІКРО- ТА НАНОНЕОДНОРІДНІ МАТЕРІАЛИ:
МОДЕЛІ ТА ЕКСПЕРИМЕНТ**
**MICRO- AND NANO-INHOMOGENEOUS MATERIALS:
MODELS AND EXPERIMENTS**

Матеріали
Міжнародної наукової конференції

присвяченої 100-річчю
Національної академії наук України
17 – 18 вересня 2018 р.
Львів, Україна

Науковий редактор – *Є. Чапля*
Комп'ютерна верстка – *О. Бачинська*

Центр математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
вул. Дж. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна
тел.: (032) 261-18-86, 261-18-85
e-mail: pjanylo@cmm.lviv.ua
svit@cmm.lviv.ua

Підписано до друку 06.09.2018. Формат 60×84/16
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 4.25.
Наклад 100 прим.

Видавець і виготовлювач: ТЗОВ «Растр – 7»
79005, м. Львів, вул. Кн. Романа, 9/1, тел./факс (032) 235 52 05
e-mail: rastr.sim@gmail.com, www.rastr-7.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ЛВ № 22 від 19.11.2002 р.